SCIENTIA
Mars 1923.

PHYS. MATHÉMATIQUE
n° 40.

L'ÉLECTRODYNAMIQUE

DES

MILIEUX ISOTROPES EN REPOS

D'APRÈS HELMHOLTZ ET DUHEM

PAR

Louis ROY
PROFESSEUR DE MÉCANIQUE RATIONNELLE ET APPLIQUÉE
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

A LA MÉMOIRE

DE

PIERRE DUHEM

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR DE PHYSIQUE THÉORIQUE
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

(1861-1916)

L'ÉLECTRODYNAMIQUE

DES

MILIEUX ISOTROPES EN REPOS

D'APRÈS HELMHOLTZ ET DUHEM

INTRODUCTION.

En lisant le titre de cet Ouvrage, consacré à des théories ayant immédiatement précédé les tentatives actuelles de bouleversement de nos idées traditionnelles, certains pourront penser que nous retardons d'une trentaine d'années sur notre époque. A ceux-là, nous pourrions répondre qu'on ne retarde jamais, quand on cherche à apporter un peu de logique et de clarté dans des questions où ces qualités font défaut. Nous préférons leur faire remarquer que nos contemporains eux-mêmes n'ont pas craint d'écrire sur les principes de la Mécanique rationnelle, bien que ses équations fondamentales soient définitivement acquises à la Science depuis plus de deux siècles. Ce sera notre excuse d'avoir consacré cet opuscule à des théories incomparablement moins anciennes.

La Préface de l'Ouvrage *Électricité et Optique*, que H. Poincaré a, en partie, consacré à Maxwell, est trop connue pour qu'il soit nécessaire d'y revenir; rappelons seulement la conclusion suivante, qui est significative :

« On ne doit donc pas se flatter d'éviter toute contradiction; mais il faut en prendre son parti. Deux théories contradictoires peuvent, en effet, pourvu qu'on ne les mêle pas et qu'on n'y cherche pas le fond des choses, être toutes deux d'utiles instruments de recherches, et peut-être

la lecture de Maxwell serait-elle moins suggestive s'il ne nous avait pas ouvert tant de voies nouvelles et divergentes. »

Duhem était de ceux qui ne peuvent prendre leur parti de la contradiction. Pour lui, « la Physique théorique ne mérite le nom de science qu'à la condition d'être rationnelle; elle est libre de choisir ses hypothèses comme il lui plaît, pourvu que ces hypothèses ne soient ni superflues ni contradictoires; et la chaine des déductions qui relie aux hypothèses les vérités d'ordre expérimental ne doit contenir aucun maillon de solidité douteuse.

» Une théorie physique unique qui, du plus petit nombre possible d'hypothèses compatibles entre elles, tirerait, par des raisonnements impeccables, l'ensemble des lois expérimentales connues, est évidemment un idéal dont l'esprit humain n'atteindra jamais la perfection; mais, s'il ne peut atteindre cette limite, il doit sans cesse y tendre; si diverses régions de la Physique sont représentées par des théories sans lien les unes avec les autres, voire même par des théories qui se contredisent lorsqu'elles se rencontrent en un domaine commun, le physicien doit regarder ce disparate et cette contradiction comme des maux transitoires; il doit s'efforcer de substituer l'unité au disparate, l'accord logique à la contradiction; jamais il n'en doit prendre son parti.

» Sans doute, on ne doit point demander compte à un physicien de génie de la voie qui l'a conduit à une découverte. Les uns, dont Gauss est le parfait modèle, enchaînent toujours leurs pensées dans un ordre irréprochable et ne proposent à notre raison aucune vérité nouvelle qu'ils ne l'appuient des démonstrations les plus rigoureuses. Les autres, comme Maxwell, procèdent par bonds et, s'ils daignent étayer de quelques preuves les vues de leur imagination, ces preuves sont, trop souvent, précaires et caduques. Les uns et les autres ont droit à notre admiration. Mais, si les intuitions imprévues des seconds nous surprennent davantage que les déductions majestueusement ordonnées des premiers, nous aurions tort de voir en celles-là, plus qu'en celles-ci, la marque du génie; si les Maxwell sont plus *suggestifs* que les Gauss, c'est qu'ils n'ont pas pris la peine d'achever leurs inventions; c'est qu'après avoir affirmé des propositions

nouvelles, ils nous ont laissé la tâche, souvent malaisée, de les transformer en vérités démontrées.

» Surtout, devons-nous nous garder soigneusement d'une erreur qui est de mode, aujourd'hui, en une certaine École de physiciens; elle consiste à regarder les théories illogiques et incohérentes comme de meilleurs instruments de travail, comme des méthodes de découvertes plus fécondes que les théories logiquement construites; cette erreur aurait quelque peine à s'autoriser de l'histoire de la Science; je ne sache pas que l'Électrodynamique de Maxwell ait plus contribué au développement de la Physique que l'Électrodynamique d'Ampère, ce parfait modèle des théories que construisaient, au commencement du XIXe siècle, des génies élevés à l'école de Newton.

» Lors donc que nous nous trouvons en présence d'une théorie qui offre des contradictions, cette théorie fût-elle l'œuvre d'un homme de génie, notre devoir est de l'analyser et de la discuter jusqu'à ce que nous parvenions à distinguer nettement, d'une part, les propositions susceptibles d'être logiquement démontrées et, d'autre part, les affirmations qui heurtent la logique et qui doivent être transformées ou rejetées » ([1]).

A propos de son analyse de l'œuvre de Maxwell, Duhem écrivait d'autre part :

« Cet examen, nous l'avons poursuivi avec la plus grande minutie, suivant de son origine jusqu'à son complet développement chacune des tentatives du grand physicien écossais vers l'organisation de la science électrique. Maxwell avait sans cesse les yeux fixés sur le but à atteindre, et ce but, bien digne de ses efforts, c'était la constitution d'une théorie qui embrassât à la fois les phénomènes électriques et les effets de la lumière. Malheureusement, aucune des voies dans lesquelles il s'engageait successivement ne le pouvait mener là où il tendait. Alors, au moment où la logique lui intimait l'ordre de ne pas passer, sûr que l'objet qu'il voulait atteindre était la vérité, par une faute flagrante de raisonnement ou de calcul, il franchissait l'obstacle important. Le spectacle de ces sauts périlleux qui arrivent au but

([1]) P. Duhem, *Les théories électriques de J. Clerk Maxwell*, p. 14.

en narguant les règles suivant lesquelles la raison du commun des hommes est tenue de marcher, révèle à notre admiration stupéfaite ce que c'est qu'un génie ; l'étude des œuvres de Fresnel nous réserve souvent, elle aussi, de pareilles surprises.

» La meilleure manière de marquer notre admiration pour de tels génies, c'est de refaire leur œuvre après eux, en nous conformant aux lois communes de la logique ; c'est de tracer, pour parvenir au sommet qu'ils ont découvert, une route sûre dont les contours évitent les précipices qu'ils franchissaient d'un bond. Telle a été, à l'égard de l'audacieuse et déconcertante Électrodynamique de Maxwell, la tâche accomplie par Helmholtz » ([1]).

Duhem a complété l'œuvre de Helmholtz, en consacrant à l'édification d'une Électrodynamique cohérente une grande partie de son activité scientifique. Mais vraisemblablement pour les raisons que nous dirons plus loin, ses efforts de reconstructeur et de « critique souvent impitoyable » se sont heurtés à une indifférence à peu près générale, qu'il reconnaissait lui-même, non sans une certaine mélancolie, mais sans être pour cela découragé : « Nos efforts ont-ils été couronnés de succès ? Reconnaissons-le franchement, ils sont demeurés sans aucun effet ; on ne les a ni approuvés ni blâmés ; nul n'en a tenu compte. Le raisonnement n'a point de prise sur qui déclare qu'il ne se soucie pas d'avoir raison. Or, une admiration déréglée pour l'œuvre de Maxwell a, chez nombre de physiciens, engendré cette opinion : il importe peu qu'une théorie soit logique ou absurde ; on lui demande seulement de suggérer des expériences.

» Si cette opinion devait être générale et définitive, nous aurions singulièrement gaspillé notre vie, puisque nous l'avons consacrée tout entière à édifier une doctrine aussi rigoureuse, aussi exactement coordonnée que possible.

» Mais un jour viendra, n'en doutons pas, où l'on reconnaîtra que le rôle unique de la théorie physique n'est pas de suggérer des expériences ; que ce n'en est même pas le rôle principal ; qu'avant tout, la théorie a pour but de classer et d'ordonner le chaos des faits que l'expérience nous a révé-

([1]) P. Duhem, *Notice sur ses travaux scientifiques*, p. 105.

lés; ce jour-là, on reconnaîtra que l'œuvre électrodynamique de Helmholtz était vraiment une belle œuvre et que nous avons bien fait de nous y tenir. La Logique peut être patiente, car elle est éternelle » [1].

Les raisons pour lesquelles les efforts de Duhem n'ont pas abouti sont, selon nous, de deux sortes : les unes résultent de la forme souvent rébarbative de ses écrits et d'une certaine fluctuation d'idées à laquelle il n'a pu échapper; les autres, de certains résultats essentiels de ses théories, qui ne pouvaient pleinement satisfaire les physiciens.

C'est ainsi que, dans ses importantes *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, l'appareil algébrique tient une place certainement excessive. Duhem a reproché à Maxwell ses nombreuses variations sur les théories électriques et magnétiques, variations d'ailleurs à peu près inévitables dans une science en voie d'élaboration. Or c'est là une critique de laquelle lui-même n'est pas complètement à l'abri : par exemple, dans son Mémoire de 1896 *Sur la propagation des actions électrodynamiques*, il adopte deux constantes fondamentales des actions électrodynamiques, l'une relative aux courants de conduction, l'autre aux courants de déplacement, en déclarant même irrecevable toute théorie qui les identifierait. Par une étrange contradiction à la Maxwell et sans expliquer un tel revirement, c'est pourtant à cette dernière solution qu'il se résoudra dans ses publications ultérieures.

D'autre part, Duhem a insisté, après Helmholtz et H. Poincaré, sur ce fait que la doctrine de Helmholtz explique les expériences de Hertz, c'est-à-dire est capable de conduire à une théorie électromagnétique de la lumière, moyennant certain postulat appelé par lui « hypothèse de Faraday-Mossotti ». Cette circonstance suffisait à ses yeux pour que les physiciens rejetassent définitivement la théorie de Maxwell en faveur de celle de Helmholtz. Or, si l'hypothèse de Faraday-Mossotti conduit à des équations du champ magnétique identiques à celles de Maxwell, il n'en est pas de même des équations du champ électrique, du potentiel électrique et du potentiel vecteur total, qui restent différentes

(1) P. Duhem, *loc. cit.*, p. 107.

de celles de Maxwell. Cette demi-concordance ne pouvait donc pleinement satisfaire les physiciens; entre des équations, mal démontrées il est vrai, mais qui paraissaient confirmées par l'expérience, et une théorie d'apparence compliquée, qui paraissait encore chercher sa voie, leur choix ne pouvait être douteux.

On savait bien depuis longtemps que, moyennant l'hypothèse de Faraday-Mossotti et en annulant la constante de Helmholtz, la concordance entre les équations de Helmholtz et celles de Maxwell est complète, mais aucun fait certain d'expérience ne paraissait exiger que cette constante fût nulle. Bien au contraire, Duhem croyait voir dans les expériences de M. Blondlot la preuve que cette constante est égale au produit du pouvoir inducteur spécifique du vide par sa perméabilité. Il n'a malheureusement pas assez vécu pour s'apercevoir que la constante de Helmholtz doit *nécessairement*, comme conséquence de l'expérience la plus vulgaire, recevoir la valeur zéro. Dès lors, la concordance devient complète et la véritable démonstration des équations de Maxwell réside en la théorie de Helmholtz. Cette théorie, qui a l'avantage de se développer suivant les règles d'une logique impeccable et de ne point briser la tradition, qui traite avec la même aisance le cas des aimants parfaitement doux ou celui des aimants permanents, et qui conduit sans obstacle des principes posés il y a un siècle aux conséquences les plus certaines entrevues par Maxwell, doit donc désormais, selon le vœu de Duhem, remplacer les essais de démonstration dont on avait dû se contenter jusqu'ici, et que d'ailleurs Hertz lui-même jugeait si insuffisants, qu'il avait trouvé plus simple de les supprimer par cet aphorisme resté célèbre : « La théorie de Maxwell, ce sont les équations de Maxwell. »

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS.

1. *Définition des aimants.* — D'après la loi de Coulomb des actions magnétiques, la force de répulsion qui s'exerce entre deux masses magnétiques ponctuelles m, m' a pour valeur $\varepsilon' \frac{mm'}{r^2}$, r étant leur distance et ε' une constante dite *constante fondamentale des actions magnétiques*. Cette force est donc, contrairement à l'opinion courante, indépendante de la nature du milieu ambiant; en particulier, si ce milieu est homogène et indéfini, nous verrons (n° 9) que ε' ne saurait être identifié avec l'inverse de sa perméabilité.

L'opinion commune que ε' dépend de la nature du milieu tient à ceci : si les deux masses sont plongées dans un milieu polarisable, la force *observée* exercée sur m résulte non seulement de l'action de m', mais aussi de celle des masses magnétiques induites dans le milieu par la présence des masses m et m'; or nous verrons (n° 9) que cette force résultante n'est pas susceptible d'une expression simple.

Un *doublet magnétique* est une particule de volume $d\varpi$ renfermant deux masses ponctuelles m, $-m$; dl étant leur distance, le vecteur

$$\mathfrak{I} = \frac{m\,dl}{d\varpi} \tag{1}$$

ayant pour origine le milieu O de dl et dirigé vers la masse m est l'*intensité d'aimantation* du doublet. Le *potentiel magnétique* en un point d'un système de masses ponctuelles étant par définition $\mathcal{V} = \sum \frac{m}{r}$, r étant la distance de la masse m au point considéré [1], le potentiel du doublet

[1] Afin d'éviter toute confusion, signalons que beaucoup d'auteurs appellent potentiel magnétique la quantité $\varepsilon' \sum \frac{m}{r}$, c'est-à-dire le produit $\varepsilon' \mathcal{V}$.

en un point M situé à la distance r de O est

$$d\mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{I} \cos \alpha}{r^2} \, d\varpi,$$

α étant l'angle mOM.

L'expérience de l'aimant brisé suggère de considérer un aimant comme un système continu de doublets, en chaque point O duquel les composantes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{I}$, suivant les axes rectangulaires auxquels l'aimant est rapporté, sont des fonctions continues des coordonnées ξ, η, ζ de ce point. Le potentiel de l'aimant en un point M(x, y, z) est alors

$$\mathfrak{V}(x, y, z) = \int \frac{\mathfrak{I} \cos \alpha}{r^2} \, d\varpi,$$

l'intégration s'étendant au volume de l'aimant; cette expression s'écrit encore, d'après une transformation bien connue,

$$(2) \qquad \mathfrak{V}(x, y, z) = \int \left(\mathcal{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \mathcal{B} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \mathcal{C} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\varpi.$$

Nous poserons souvent, pour abréger l'écriture,

$$\left| \mathcal{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right| = \mathcal{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + \mathcal{B} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + \mathcal{C} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta},$$

et nous ferons un usage fréquent de cette notation dans d'autres cas analogues; par exemple, il nous arrivera de poser

$$\left| \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \right| = \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial z}, \qquad | \mathcal{A} \alpha | = \mathcal{A} \alpha + \mathcal{B} \beta + \mathcal{C} \gamma.$$

Le *champ magnétique* $\mathcal{H}$ en M dû à l'aimant a pour composantes

$$(3) \qquad (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) = - \varepsilon' \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial (x, y, z)};$$

si en M existe une masse m, le *potentiel mutuel* de l'aimant et de m est, par définition, $\Pi = \varepsilon' m \mathfrak{V}$, de sorte que le travail élémentaire de la force appliquée à m et due à l'aimant est $-d\Pi$.

Considérons deux aimants A, A' en présence: le potentiel

mutuel de A' et d'un doublet $d\varpi$ constitutif de A est

$$d\Pi = \varepsilon' m (\mathcal{V}'_m - \mathcal{V}'_{-m}) = \varepsilon' m \int \left| \mathcal{A}' \frac{\partial}{\partial \xi'} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right) \right| d\varpi',$$

r, r' étant les distances des masses m, $-m$ du doublet $d\varpi$ à un doublet $d\varpi'$ de A'. Si l'on remarque que la dernière parenthèse est égale à $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial l} dl$, il vient d'après (1)

$$d\Pi = \varepsilon' m \, dl \frac{\partial}{\partial l} \int \left| \mathcal{A}' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi'} \right| d\varpi' = \varepsilon' \mathcal{I} \frac{\partial \mathcal{V}'}{\partial l} d\varpi = \varepsilon' \left| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}'}{\partial \xi} \right| d\varpi;$$

d'où, pour le potentiel mutuel de A, A',

$$(4) \qquad \Pi = \varepsilon' \int \left| \mathcal{A} \frac{\partial \mathcal{V}'}{\partial \xi} \right| d\varpi = \varepsilon' \int \left| \mathcal{A}' \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \xi'} \right| d\varpi',$$

la deuxième expression résultant de la considération des actions de A sur chaque doublet $d\varpi'$ constitutif de A'.

En fait, les masses magnétiques sont des fictions, et les aimants correspondent seuls à la réalité. Ce qui précède doit donc être regardé comme une simple introduction à la définition suivante :

Un aimant A *est défini en chacun de ses points* (x, y, z) *par le vecteur* $\mathcal{I}$ *intensité d'aimantation, dont les composantes* $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ *sont des fonctions continues de* x, y, z, *et par son potentiel magnétique* (2); *le champ magnétique de l'aimant est le vecteur* $\mathcal{H}$ *défini par* (3); *les actions mutuelle de deux aimants* A, A' *admettent un potentiel* Π *défini par* (4).

2. *Distribution fictive équivalente.* — La formule (2) a un sens que le point (x, y, z) soit extérieur ou intérieur à l'aimant; dans les deux cas elle peut s'écrire

$$(5) \qquad \mathcal{V}(x, y, z) = \int \frac{\mathcal{E}(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\varpi + \int \frac{\mathcal{S}(\xi, \eta, \zeta)}{r} dS,$$

la seconde intégrale étant étendue à la surface S de l'aimant, avec

$$(6) \qquad \mathcal{E}(x, y, z) = -\left| \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \right|, \qquad \mathcal{S}(x, y, z) = -| \mathcal{A} \alpha |,$$

et α, β, γ désignant les cosinus directeurs de la normale intérieure en un point (x, y, z) de S. La formule (5) exprime que le potentiel de l'aimant coïncide avec celui d'un fluide magnétique réparti dans l'aimant avec la densité cubique $\mathcal{E}$ et, sur sa surface, avec la densité superficielle $\mathcal{S}$; cette distribution $(\mathcal{E}, \mathcal{S})$ est appelée *distribution fictive équivalente* de l'aimant considéré.

Il résulte de (5), (6) et (3) que $\mathcal{V}$ est continu dans tout l'espace, que $\mathcal{H}$ y a partout, sauf sur S, une valeur bien déterminée, qu'on a

$$(7) \qquad \Delta\mathcal{V} = 4\pi\left|\frac{\partial\mathcal{A}}{\partial x}\right|$$

en tout point intérieur de l'aimant et

$$(8) \qquad \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial n_1} + \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial n_2} = 4\pi\,|\mathcal{A}_1\alpha_1 + \mathcal{A}_2\alpha_2|$$

en tout point de la surface séparative de deux aimants 1 et 2, n_1 et n_2 étant les normales intérieures en ce point.

Les formules (3) définissant le champ magnétique de l'aimant ont un sens que le point $M(x, y, z)$ soit extérieur ou intérieur à l'aimant; elles représentent, dans les deux cas, la force exercée sur l'unité de masse magnétique concentrée en M par la distribution fictive équivalente. Mais la force exercée par l'aimant ne coïncide avec celle $\mathcal{H}$ exercée par la distribution fictive que si le point M est *extérieur* à l'aimant; si M est intérieur à l'aimant, on reconnaît en effet que la force exercée par l'aimant est indéterminée. Autrement dit, *la notion de force exercée par un aimant sur une masse magnétique ponctuelle placée à l'intérieur de cet aimant n'a pas de sens*. Cette vérité est d'ailleurs souvent méconnue.

L'équation (7) s'écrit, d'après (3),

$$(9) \qquad \left|\frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{X} + 4\pi\varepsilon'\mathcal{A})\right| = 0 \qquad \text{ou} \qquad \left|\frac{\partial\mathcal{B}_x}{\partial x}\right| = 0,$$

en posant

$$(10) \qquad (\mathcal{B}_x, \mathcal{B}_y, \mathcal{B}_z) = (\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) + 4\pi\varepsilon'(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}).$$

Le vecteur

$$(10') \qquad \mathfrak{B} = \mathcal{H} + 4\pi\mathfrak{J} \quad (^1)$$

ainsi défini s'appelle l'*induction magnétique* au point M.

3. *Forces agissant sur un aimant.* — Considérons un aimant A placé dans le champ magnétique ($\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$) d'un autre aimant; d'après (3) et (4), le potentiel mutuel des deux aimants est

$$(11) \qquad \Pi = -\int (\mathcal{A}\mathcal{X} + \mathfrak{B}\mathcal{Y} + \mathcal{C}\mathcal{Z})\, d\varpi.$$

Pour calculer les éléments P, Q, R; L, M, N de la réduction, par rapport à l'origine O des coordonnées, des forces exercées par le champ sur l'aimant supposé rigide, imprimons-lui un déplacement virtuel résultant d'une translation ($\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$) et d'une rotation (δp, δq, δr) autour de O; on a

$$P\,\delta\xi + Q\,\delta\eta + R\,\delta\zeta + L\,\delta p + M\,\delta q + N\,\delta r = -\delta\Pi,$$

$\delta\Pi$ étant la variation correspondante de Π, qui se calcule au moyen de (11) et du déplacement virtuel

$$\delta x = \delta\xi + z\,\delta q - y\,\delta r, \quad \ldots$$

de chaque point (x, y, z) de A. On trouve ainsi

$$(12) \quad \left\{\begin{aligned} P &= \int \left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x} + \mathfrak{B}\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial x} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial x}\right) d\varpi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L &= \int \Big[\left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial z} + \mathfrak{B}\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial z} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial z}\right) y \\ &\quad - \left(\mathcal{A}\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial y} + \mathfrak{B}\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial y} + \mathcal{C}\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial y}\right) z + \mathfrak{B}\mathcal{Z} - \mathcal{C}\mathcal{Y} \Big] d\varpi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

formules qui montrent qu'un aimant placé dans un champ uniforme n'est soumis qu'à un couple.

4. *Feuillets magnétiques.* — Un *feuillet magnétique* est

(1) Égalité vectorielle; bien que la lettre $\mathfrak{B}$ désigne à la fois l'induction et la composante de $\mathfrak{J}$ suivant Oy, aucune confusion n'est possible.

une surface matérielle S, d'épaisseur l constante et très petite, en chaque point de laquelle l'intensité d'aimantation $\mathfrak{J}$ est constante et normale à S. Il résulte alors de (6) que la distribution fictive équivalente se réduit à deux couches de densités superficielles constantes $\mathfrak{J}$, $-\mathfrak{J}$ recouvrant chaque face de S; la face chargée négativement est la *face négative* du feuillet, l'autre sa *face positive*; la constante $\mathfrak{P} = l\mathfrak{J}$ s'appelle la *puissance* du feuillet.

Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la *normale positive* n à S, c'est-à-dire de la demi-normale menée vers l'extérieur du feuillet en un point de sa face positive; en prenant $d\varpi = l\,dS$ et en remarquant que $\mathfrak{A} = \alpha\mathfrak{J} = \alpha\,\frac{\mathfrak{P}}{l}$, il vient, d'après (2), pour le potentiel magnétique du feuillet en un point (x, y, z),

$$(13)\qquad \mathcal{V} = \int \left| \mathfrak{A}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} \right| l\,dS$$

$$= \mathfrak{P}\int \left| \alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} \right| dS = \mathfrak{P}\int \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\,dS = -\mathfrak{P}\Omega,$$

Ω étant l'angle solide sous lequel on voit, du point considéré, la face négative du feuillet. Considérons maintenant deux feuillets F, F'; leur potentiel mutuel est, d'après (4),

$$\Pi = \varepsilon'\int \left| \mathfrak{A}'\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi'} \right| d\varpi' = \varepsilon'\mathfrak{P}'\int \left| \alpha'\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi'} \right| dS' = \varepsilon'\mathfrak{P}'\int \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial n'}\,dS',$$

c'est-à-dire, d'après (13),

$$(14)\qquad \Pi = \varepsilon'\mathfrak{P}\mathfrak{P}'\int\int \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial n\,\partial n'}\,dS\,dS'.$$

Soient, d'autre part, Φ le flux de force à travers S et relatif à la direction n, du champ magnétique créé par le feuillet F'; Φ' le flux à travers S' et relatif à n', du champ magnétique créé par le feuillet F; on a par exemple

$$(15)\qquad \Phi = -\varepsilon'\int \frac{\partial\mathcal{V}'}{\partial n}\,dS = -\varepsilon'\mathfrak{P}'\int\int \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial n\,\partial n'}\,dS\,dS',$$

de sorte que (14) s'écrit encore

$$\Pi = -\mathfrak{P}\Phi = -\mathfrak{P}'\Phi'.$$

5. *Énergie magnétique.* — Désignons maintenant par $\mho$, $\mho'$ les potentiels magnétiques de deux aimants A, A'; on a, d'après (4),

$$2\Pi = \varepsilon'\int\left|\mathcal{A}\frac{\partial\mho'}{\partial\xi}\right|d\varpi + \varepsilon'\int\left|\mathcal{A}'\frac{\partial\mho}{\partial\xi'}\right|d\varpi'.$$

Soit alors $\mathcal{V} = \mho + \mho'$ le potentiel magnétique total et posons

$$2\mathfrak{W} = \varepsilon'\int\left|\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi}\right|d\varpi + \varepsilon'\int\left|\mathcal{A}'\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial\xi'}\right|d\varpi';$$

il vient

$$\mathfrak{W} = \Pi + \frac{\varepsilon'}{2}\int\left|\mathcal{A}\frac{\partial\mho}{\partial\xi}\right|d\varpi + \frac{\varepsilon'}{2}\int\left|\mathcal{A}'\frac{\partial\mho'}{\partial\xi'}\right|d\varpi'.$$

Or, si l'on déplace les deux aimants A, A' sans changer leur forme ni leur aimantation, les deux dernières intégrales restent manifestement constantes; d'où $\delta\mathfrak{W} = \delta\Pi$ dans une telle modification. La fonction $\mathfrak{W}$ s'appelle l'*énergie magnétique* (¹) du système; son expression générale est, en employant x, y, z comme variables d'intégration,

$$(16)\qquad \mathfrak{W} = \frac{\varepsilon'}{2}\int\left|\mathcal{A}\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial x}\right|d\varpi,$$

l'intégration s'étendant à tous les aimants, ou, ce qui revient au même, à tout l'espace. L'énergie magnétique s'écrit encore, d'après (6),

$$(16')\qquad \mathfrak{W} = \frac{\varepsilon'}{2}\int\mathcal{V}\mathcal{E}\,d\varpi + \frac{\varepsilon'}{2}\int\mathcal{V}\mathcal{S}\,dS,$$

la seconde intégrale s'étendant à toutes les surfaces de discontinuité; d'où, d'après (7), (8), (3) et l'application de la formule de Green,

$$(17)\qquad \mathfrak{W} = \frac{1}{8\pi\varepsilon'}\int\mathfrak{H}^2\,d\varpi.$$

(¹) Il ne faut voir dans ce mot qu'une simple notation, car nous verrons (nº 10) que $\mathfrak{W}$ ne représente qu'une partie de l'énergie interne d'un système aimanté. Duhem appelait $\mathcal{V}$ la *fonction potentielle magnétique* et $\mathfrak{W}$ le *potentiel magnétique*. Nous avons préféré la dénomination adoptée dans le texte, comme plus conforme à l'usage.

6. *Équilibre magnétique.* — La théorie de l'aimantation par influence remonte à Poisson, mais les difficultés auxquelles elle se heurte ont conduit Lord Kelvin à admettre les équations de Poisson à titre d'hypothèse. Duhem a rattaché cette théorie à la Thermodynamique, en montrant tout d'abord que le potentiel thermodynamique interne d'un système aimanté isotrope est

$$(18)\qquad \mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \mathfrak{W} - \int \mathfrak{F}(\mathfrak{I})\, d\varpi,$$

$\mathcal{F}_0$ étant le potentiel thermodynamique du système désaimanté et $\mathfrak{F}(\mathfrak{I})$ une certaine fonction de $\mathfrak{I}$, dépendant en outre des autres paramètres définissant l'état de la particule $d\varpi$, notamment de sa température absolue T.

Les aimants réels sont des corps intermédiaires entre les *aimants permanents* et les *aimants parfaitement doux.* Un aimant permanent est celui dont l'intensité d'aimantation est invariable en chacun de ses points en toutes circonstances; un aimant parfaitement doux est celui dont l'intensité d'aimantation est susceptible de varier, la fonction $\mathfrak{F}(\mathfrak{I})$ relative à un tel aimant étant de l'ordre de $\mathfrak{I}^2$ pour $\mathfrak{I}$ infiniment petit et sa dérivée $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{I}}$ étant une fonction uniforme de $\mathfrak{I}$.

Cela posé, considérons un système d'aimants permanents et d'aimants parfaitement doux; d'après les principes de l'Énergétique, les conditions de l'équilibre magnétique s'obtiendront en écrivant que la variation de $\mathcal{F}$ est nulle dans toute modification virtuelle isothermique où l'aimantation varie seule, c'est-à-dire qu'on a, d'après (18),

$$(19)\qquad \delta\mathfrak{W} + \delta \int \mathfrak{F}(\mathfrak{I})\, d\varpi = 0.$$

Or, d'après (16),

$$(20)\qquad \begin{aligned} \delta\mathfrak{W} &= \frac{\varepsilon'}{2}\int \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, \delta\mathcal{A} \right| d\varpi + \frac{\varepsilon'}{2}\int \left| \mathcal{A}\, \delta \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right| d\varpi \\ &= \varepsilon' \int \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, \delta\mathcal{A} \right| d\varpi, \end{aligned}$$

car un calcul direct montre que les deux premières intégrales sont égales; d'autre part,

$$(21)\qquad \delta \int \mathfrak{F}(\mathfrak{I})\, d\varpi = \int \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{I}}\, \delta\mathfrak{I}\, d\varpi = \int \left| \frac{\mathcal{A}}{\varkappa}\, \delta\mathcal{A} \right| d\varpi,$$

en tenant compte de ce que $\mathfrak{I}\,\delta\mathfrak{I} = |\mathcal{A}\,\delta\mathcal{A}|$ et en posant

(22) $$\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{\mathfrak{I}}\frac{d\mathcal{F}}{d\mathfrak{I}}.$$

L'égalité (19) devient donc

$$\int \left| \left(\varepsilon' \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \frac{\mathcal{A}}{\varkappa}\right) \delta\mathcal{A} \right| d\varpi = 0.$$

Comme elle doit être satisfaite quelles que soient les variations virtuelles $\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ en chaque point d'un aimant parfaitement doux, ces variations étant nécessairement nulles en chaque point d'un aimant permanent, on en conclut qu'on doit avoir en chaque point (x, y, z) d'un aimant parfaitement doux

(23) $$(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = -\varepsilon'\varkappa \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial(x, y, z)},$$

c'est-à-dire, d'après (3),

(24) $$(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \varkappa(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}), \qquad \text{où} \qquad \mathfrak{I} = \varkappa\mathcal{H}.$$

Ce sont les formules de Poisson posées à titre d'hypothèse par Lord Kelvin; la fonction $\varkappa$ de $\mathfrak{I}$ définie par (22) s'appelle le *coefficient d'aimantation* ou la *susceptibilité magnétique*.

Moyennant les formules (24), l'expression (10') de l'induction s'écrit, à l'intérieur d'un aimant parfaitement doux,

(25) $$\mathcal{B} = \mu\mathcal{H},$$

(25') $$\mu = 1 + 4\pi\varepsilon'\varkappa$$

désignant la *perméabilité magnétique*. Mais, il ne faut pas perdre de vue que les formules (10), (10') sont générales, c'est-à-dire applicables aussi bien à un aimant permanent qu'à un aimant parfaitement doux, tandis que les formules (25), (25') supposent essentiellement l'aimant parfaitement doux.

Remarquons encore que les formules (10'), (25'), établies en laissant les unités arbitraires, montrent que, *dans tout système d'unités*, l'induction et le champ sont, contrairement à certaines opinions encore récemment émises, deux grandeurs additives donc de même nature, et la perméabilité un nombre abstrait.

D'après (23) et (25'), l'équation (8) devient, à la surface séparative de deux aimants parfaitement doux 1 et 2,

$$\mu_1 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n_1} + \mu_2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n_2} = 0$$

et, à la surface séparative d'un aimant permanent 1 et d'un aimant parfaitement doux 2,

$$(26) \qquad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n_1} + \mu_2 \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n_2} = 4\pi |\mathcal{A}_1 \alpha_1|.$$

Supposons maintenant $\varkappa$ indépendant de $\mathfrak{I}$, ce qui aura sensiblement lieu si $\mathfrak{I}$ est suffisamment petit en chaque point d'un aimant parfaitement doux; (22) donne en intégrant

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{I}) = \frac{\mathfrak{I}^2}{2\varkappa},$$

et l'expression (18) du potentiel thermodynamique interne devient

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 + \Psi + \int_1 \mathfrak{F}(\mathfrak{I})\, d\varpi + \int_2 \frac{\mathfrak{I}^2}{2\varkappa}\, d\varpi,$$

la première intégrale s'étendant aux aimants permanents 1, la seconde aux aimants parfaitement doux 2; soit, d'après (17), (24), (25') et en posant $\mathfrak{F}'_0 = \mathfrak{F}_0 + \int \mathfrak{F}(\mathfrak{I})\, d\varpi$,

$$(27) \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}'_0 + \frac{1}{8\pi\varepsilon'} \int_1 \mathcal{H}^2\, d\varpi + \frac{1}{8\pi\varepsilon'} \int_2 \mu \mathcal{H}^2\, d\varpi.$$

Cette formule s'écrit encore plus simplement

$$(27') \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}'_0 + \frac{1}{8\pi\varepsilon'} \int \mu \mathcal{H}^2\, d\varpi,$$

l'intégrale s'étendant au système entier, mais en convenant de faire $\mu = 1$ à l'intérieur des aimants permanents.

7. *Système électrisé.* — D'après la loi de Coulomb sur les actions électrostatiques, la force de répulsion qui s'exerce entre deux masses électriques ponctuelles q, q' a pour valeur $\varepsilon \frac{qq'}{r^2}$, r étant leur distance et ε une constante dite

constante fondamentale des actions électrostatiques. Cette force est donc, contrairement à l'opinion courante, indépendante de la nature du milieu ambiant; nous verrons d'ailleurs (n° 9) les raisons qui ont conduit beaucoup d'auteurs à identifier ε avec l'inverse du pouvoir inducteur spécifique du milieu ambiant.

La distribution de l'électricité sur un système est définie en chaque point d'un corps continu par la *densité électrique cubique* e, en chaque point d'une surface de discontinuité par la *densité électrique superficielle* σ; un corps est dit *conducteur* si l'électricité peut s'y déplacer, *isolant* dans le cas contraire. En outre, l'état de *polarisation diélectrique* est défini en chaque point par les composantes A, B, C de l'*intensité de polarisation* J analogue à l'intensité d'aimantation $\mathfrak{J}$; un corps est dit *diélectrique* si le vecteur J est susceptible d'y avoir une valeur non nulle, *impolarisable* dans le cas contraire.

Le *potentiel électrique* en un point (x, y, z) de l'espace est donc, d'après (2),

$$V(x, y, z) = \int \frac{e}{r} d\varpi + \int \frac{\sigma}{r} dS + \int \left| A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right| d\varpi,$$

ou encore, d'après (5) et (6),

$$(28) \qquad V(x, y, z) = \int \frac{e + E}{r} d\varpi + \int \frac{\sigma + \Sigma}{r} dS,$$

E, Σ étant, au point (ξ, η, ζ) où se trouvent les éléments $d\varpi$ ou dS, les densités cubique et superficielle de la distribution fictive équivalente de la polarisation du système définies par les formules

$$(29) \qquad E(x, y, z) = -\left| \frac{\partial A}{\partial x} \right|, \qquad \Sigma(x, y, z) = -|A\alpha|.$$

Il en résulte que V est continu dans tout l'espace; que le *champ électrostatique* H, dont les composantes X, Y, Z sont définies par les formules

$$(30) \qquad (X, Y, Z) = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial (x, y, z)},$$

a partout, sauf sur S, une valeur bien déterminée et donne lieu aux mêmes remarques (n° 2) que le champ magnétique;

qu'on a

$$\Delta V = 4\pi\left(-e + \left|\frac{\partial A}{\partial x}\right|\right) \tag{31}$$

en tout point intérieur d'un corps continu et

$$\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2} = 4\pi(-\sigma + |A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2|) \tag{32}$$

en tout point de la surface séparative de deux corps continus 1 et 2, n_1 et n_2 étant les normales intérieures en ce point.

L'équation (31) s'écrit, d'après (30),

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(X + 4\pi\varepsilon A)\right| = 4\pi\varepsilon e \qquad \text{ou} \qquad \left|\frac{\partial B_x}{\partial x}\right| = 4\pi\varepsilon e,$$

en posant

$$(B_x, B_y, B_z) = (X, Y, Z) + 4\pi\varepsilon(A, B, C).$$

Le vecteur

$$B = H + 4\pi\varepsilon J \quad (^1) \tag{33}$$

ainsi défini s'appelle l'*induction électrique* au point (x, y, z).

L'énergie électrostatique [2] du système est, d'après (16'),

$$W = \frac{\varepsilon}{2}\int V(e + E)\,d\varpi + \frac{\varepsilon}{2}\int V(\sigma + \Sigma)\,dS, \tag{34}$$

soit encore, d'après (29), (30), (31), (32) et l'application de la formule de Green,

$$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon}\int H^2\,d\varpi. \tag{34'}$$

8. *Équilibre électrique.* — Duhem a rattaché la théorie de l'équilibre électrique à la Thermodynamique, en montrant tout d'abord que le potentiel thermodynamique interne d'un système électrisé isotrope est

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 + A + W + \int f(J)\,d\varpi, \tag{35}$$

avec

$$A = \int \Theta e\,d\varpi + \int \Theta\sigma\,dS_i. \tag{36}$$

(1) Remarque analogue à celle de la page 15.
(2) Remarque analogue à celle de la page 17.

$\mathcal{F}_0$ étant le potentiel thermodynamique du système à l'état neutre, $f(J)$ une fonction de J, dépendant en outre des autres paramètres définissant l'état de la particule $d\varpi$, notamment de sa température absolue T, et Θ une fonction dépendant de l'état de la matière au point (x, y, z), dont les dérivées premières en x, y, z sont continues dans tout l'espace et dont les dérivées secondes en x, y, z sont également continues dans tout l'espace, sauf sur les surfaces de discontinuité. La définition du *diélectrique parfaitement doux* est analogue à celle de l'aimant parfaitement doux; nous supposerons toujours les diélectriques considérés parfaitement doux, car l'analogue de l'aimant permanent ne correspond à aucune réalité.

Cela posé, considérons un système pouvant être diélectrique parfaitement doux en chacun de ses points et dont certaines régions 1, 2, ..., n sont en outre conductrices, à l'exclusion du reste du système qui est isolant. Chaque conducteur i du système étant ainsi isolé, la quantité totale d'électricité qu'il porte

$$\int_i e\,d\varpi + \int_i \sigma\,dS \tag{37}$$

demeure invariable. Les conditions de l'équilibre électrique s'obtiendront alors en écrivant que $\delta\mathcal{F}$ est nul, dans toute modification virtuelle isothermique de la distribution laissant constante chaque quantité totale d'électricité (37), c'est-à-dire qu'on a, d'après (35),

$$\delta A + \delta W + \delta \int f(J)\,d\varpi = 0. \tag{38}$$

Or, on a, d'après (36) et (34),

$$\delta A = \int \Theta\,\delta e\,d\varpi + \int \Theta\,\delta\sigma\,dS,$$

$$\begin{aligned} \delta W = {} & \frac{\varepsilon}{2}\int (e+E)\,\delta V\,d\varpi + \frac{\varepsilon}{2}\int (\sigma+\Sigma)\,\delta V\,dS \\ & + \frac{\varepsilon}{2}\int V\,\delta(e+E)\,d\varpi + \frac{\varepsilon}{2}\int V\,\delta(\sigma+\Sigma)\,dS \\ = {} & \varepsilon\int V\,\delta(e+E)\,d\varpi + \varepsilon\int V\,\delta(\sigma+\Sigma)\,dS, \end{aligned} \tag{39}$$

car on reconnaît que les deux lignes du second membre sont

égales; d'autre part, on a, d'après (21),

$$(40) \qquad \delta \int f(J)\, d\varpi = \int \left| \frac{A}{k}\, \delta A \right| d\varpi,$$

k désignant le *coefficient de polarisation diélectrique* défini par l'égalité

$$(41) \qquad \frac{1}{k} = \frac{1}{J} \frac{\partial f}{\partial J}$$

analogue à (22). Comme, d'ailleurs, une intégration par parties donne, d'après (29),

$$\int V\, \delta E\, d\varpi + \int V\, \delta\Sigma\, dS = \int \left| \frac{\partial V}{\partial x}\, \delta A \right| d\varpi,$$

l'égalité (38) devient

$$\int (\varepsilon V + \Theta)\, \delta e\, d\varpi$$
$$+ \int (\varepsilon V + \Theta)\, \delta\sigma\, dS + \int \left| \left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{A}{k} \right) \delta A \right| d\varpi = 0.$$

Les deux premières intégrales s'étendent aux conducteurs seuls, puisque e et σ ne peuvent varier dans la région isolante; la troisième s'étend au système entier. Cette égalité devant être vérifiée pour toute modification où l'on a, d'après (37),

$$\int_i \delta e\, d\varpi + \int_i \delta\sigma\, dS = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

il doit exister n constantes D_i, telles qu'on ait quels que soient δe, $\delta\sigma$, $\delta(A, B, C)$

$$\Sigma \int (\varepsilon V + \Theta - D_i)\, \delta e\, d\varpi$$
$$+ \Sigma \int (\varepsilon V + \Theta - D_i)\, \delta\sigma\, dS + \int \left| \left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{A}{k} \right) \delta A \right| d\varpi = 0,$$

les sommations s'étendant aux n conducteurs du système. On doit donc avoir

$$(42) \qquad \varepsilon V + \Theta = D_i$$

en chaque point du conducteur i et

$$(43) \qquad (A, B, C) = -\varepsilon k \frac{\partial V}{\partial (x, y, z)}$$

en chaque point du système, c'est-à-dire, d'après (30),

$$(44)\qquad (A, B, C) = k(X, Y, Z), \qquad \text{ou} \qquad J = kH.$$

L'égalité (33) devient ainsi

$$(45)\qquad B = KH,$$

$$(46)\qquad K = 1 + 4\pi k$$

désignant le *pouvoir inducteur spécifique*. Les grandeurs B, H, K donnent lieu aux mêmes remarques d'homogénéité que les grandeurs magnétiques correspondantes $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}$, μ (n° 6).

Enfin l'équation aux surfaces séparatives (32) devient, d'après (44) et (46),

$$(47)\qquad K_1 \frac{\partial V}{\partial n_1} + K_2 \frac{\partial V}{\partial n_2} = -4\pi\sigma.$$

Si l'un des conducteurs est homogène, Θ y est constant, de sorte que, d'après (42), le potentiel électrique V du conducteur est aussi constant; on y a donc (H, J, B, $e = 0$) d'après (30), (44), (45), (31), de sorte que la charge du conducteur est purement superficielle.

Si l'un des conducteurs est formé de deux conducteurs en contact séparément homogènes 1 et 2, la constante D étant la même pour le conducteur entier, l'égalité (42) donne

$$\varepsilon V_1 + \Theta_1 = \varepsilon V_2 + \Theta_2,$$

d'où

$$V_1 - V_2 = \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{\varepsilon};$$

c'est la différence de potentiel de contact.

Supposons maintenant k indépendant de J, ce qui aura sensiblement lieu si J est suffisamment petit en tout point du système; on a, d'après (41),

$$f(J) = \frac{J^2}{2k},$$

et l'expression (35) du potentiel thermodynamique devient

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + A + W + \int \frac{J^2}{2k}\, d\varpi,$$

soit, d'après (34'), (44), (46),

$$(48)\qquad \mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + A + \frac{1}{8\pi\varepsilon} \int KH^2\, d\varpi.$$

9. *Remarque sur les actions entre conducteurs électrisés et entre aimants permanents.* — Considérons des conducteurs homogènes électrisés plongés dans un diélectrique D homogène, isolant, non électrisé, indéfini et de pouvoir inducteur spécifique constant K. L'équilibre électrique étant supposé établi, le potentiel électrique V du système est constant sur chaque conducteur, harmonique dans D d'après (31) et (43); enfin, d'après (36), (47) et (48), la densité électrique sur chaque conducteur et le potentiel thermodynamique du système sont

$$(49) \quad \sigma = -\frac{K}{4\pi}\frac{dV}{dn}, \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 + \int \Theta\sigma\, dS + \frac{1}{8\pi\varepsilon}\int KH^2\, d\varpi,$$

la dernière intégrale s'étendant à D seulement, puisque H est nul dans chaque conducteur.

Posons alors $V = \frac{V_1}{K}$, $\varepsilon = K\varepsilon_1$; la fonction V_1 reste constante sur chaque conducteur et harmonique dans D. On a, d'autre part, $H = H_1$, H_1 étant le champ calculé d'après (30) en remplaçant V par V_1 et ε par ε_1; de sorte que les formules (49) deviennent

$$(49') \quad \sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_1}{\partial n}, \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 + \int \Theta\sigma\, dS + \frac{1}{8\pi\varepsilon_1}\int H_1^2\, d\varpi.$$

La comparaison de (49) à (49′) montre que la distribution électrique sur le système considéré et les actions qui s'y exercent, dont le travail virtuel est $-\delta\mathfrak{F}$, sont celles qu'on calculerait si, faisant abstraction du diélectrique D, c'est-à-dire le remplaçant par un milieu impolarisable, on attribuait à la constante des actions électrostatiques, non pas sa valeur réelle ε, mais la valeur fictive $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{K}$. On peut donc dire que la force de répulsion qu'on *observe* entre deux conducteurs de petites dimensions par rapport à leur distance r, portant des charges q, q' et plongés dans un diélectrique isolant, homogène, indéfini et de pouvoir inducteur spécifique constant K, est

$$(50) \qquad F = \frac{\varepsilon}{K}\frac{qq'}{r^2}.$$

En fait, la force *réelle* qui s'exerce entre les deux conduc-

teurs est toujours $\varepsilon\frac{qq'}{r^2}$ d'après la loi de Coulomb; mais la force *observée* résulte de celle-là et des actions du diélectrique polarisé sur chaque conducteur.

L'analogie entre l'Électrostatique et le Magnétisme peut faire croire à l'existence d'une proposition analogue à la précédente, quand on remplace les conducteurs par des aimants permanents A et le diélectrique isolant ambiant par un milieu parfaitement doux D de perméabilité constante μ. Nous allons voir qu'il n'en est rien. En effet, d'après (7) et (23), le potentiel magnétique $\mathcal{V}$ du système est harmonique dans D; à la surface séparative S de A et de D on a, d'après (26),

$$(51) \qquad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n_1} + \mu \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n} = 4\pi |\mathcal{A}_1 \alpha_1|,$$

n_1 étant la normale intérieure à A, n celle à D; on a, enfin d'après (27),

$$(52) \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}'_0 + \frac{1}{8\pi\varepsilon'}\int_A \mathcal{H}^2\, d\varpi + \frac{1}{8\pi\varepsilon'}\int_D \mu \mathcal{H}^2\, d\varpi.$$

Si maintenant on pose $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{V}_1}{\mu}$, $\varepsilon' = \mu\varepsilon'_1$, la fonction $\mathcal{V}_1$ reste harmonique dans D; sur S, on a

$$(51') \qquad \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial n} = 4\pi |\mathcal{A}_1 \alpha_1|,$$

et comme on a encore, d'après (3), $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$, (52) devient

$$(52') \qquad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}'_0 + \frac{1}{8\pi\varepsilon'}\int_A \mathcal{H}_1^2\, d\varpi + \frac{1}{8\pi\varepsilon'_1}\int_D \mathcal{H}_1^2\, d\varpi.$$

On voit ainsi qu'il n'est plus possible de passer de (51), (52) à (51'), (52') en remplaçant $\mathcal{V}$ par $\mathcal{V}_1$, ε' par ε'_1 et en faisant $\mu = 1$; des conclusions analogues à celles de l'Électrostatique ne sont donc plus possibles.

10. ***Énergie interne d'un système électrisé et aimanté.*** — D'après les principes de l'Énergétique, l'énergie interne U d'un système défini par des variables normales se déduit de son potentiel thermodynamique interne $\mathfrak{F}$ par la formule

$$E U = \mathfrak{F} - T\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T},$$

$\mathfrak{E}$ étant l'équivalent mécanique de la chaleur et la température T étant supposée uniforme; dans le cas contraire, cette formule reste valable pour une particule du système.

Comme les corps électrisés et aimantés n'ont aucune action mutuelle, le potentiel thermodynamique d'un système électrisé et aimanté s'obtient en additionnant les termes de (18) et (35); si l'on remarque enfin que $\mathfrak{W}$ et W sont indépendants de T, l'égalité précédente donne

$$(53) \qquad \mathfrak{E}\,U = \mathfrak{E}\,U_0 + \mathfrak{W} + \int \left[\mathfrak{F}(\mathfrak{I}) - T \frac{\partial \mathfrak{F}(\mathfrak{I})}{\partial T} \right] d\varpi + M + W + \int \left[\mathfrak{f}(J) - T \frac{\partial \mathfrak{f}(J)}{\partial T} \right] d\varpi,$$

en posant

$$(54) \qquad M_1 = \int \left(\Theta - T \frac{\partial \Theta}{\partial T} \right) e\, d\varpi + \int \left(\Theta - T \frac{\partial \Theta}{\partial T} \right) \sigma\, dS$$

et U_0 désignant l'énergie interne du système à l'état neutre. Dans le cas particulier où $\varkappa$ et k sont indépendants de $\mathfrak{I}$ et de J, au sein de chaque aimant et de chaque diélectrique parfaitement doux, (53) devient, d'après (27′) et (48),

$$(55) \qquad \mathfrak{E}\,U = \mathfrak{E}\,U'_0 + \frac{1}{8\pi\varepsilon'} \int \mu \mathcal{H}^2\, d\varpi + \frac{1}{8\pi\varepsilon} \int K H^2\, d\varpi + M - \int T \frac{\partial(\mathfrak{F} + \mathfrak{f})}{\partial T}\, d\varpi,$$

égalité où l'on doit faire $\mu = 1$ à l'intérieur des aimants permanents et où U'_0 a une signification analogue à $\mathfrak{F}'_0$. Beaucoup d'auteurs substituent à l'expression générale (53) l'expression (55) débarrassée de ses deux derniers termes.

11. *Courants de conduction et de polarisation.* — Lorsque la distribution électrique varie avec le temps, on fait correspondre à chaque point $M(x, y, z)$ d'un corps conducteur un vecteur (u, v, w) d'origine M, appelé *densité du courant de conduction* en M et défini de la manière suivante : soient, à l'instant t, dS un élément de surface lié à la matière et passant par M, Mn une demi-normale à dS de cosinus directeurs α, β, γ; par définition du vecteur (u, v, w), la quantité d'électricité qui traverse dS dans le sens de Mn pendant le temps dt a pour valeur $(u\alpha + v\beta + w\gamma)\, dS\, dt$

Il en résulte qu'on a, en chaque point d'un milieu en repos par rapport aux axes de coordonnées, l'équation de continuité

$$(56)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial e}{\partial t}=0$$

et, en chaque point d'une surface de discontinuité séparative de deux conducteurs 1 et 2,

$$(57)\qquad u_1\alpha_1+v_1\beta_1+w_1\gamma_1+u_2\alpha_2+v_2\beta_2+w_2\gamma_2+\frac{\partial\sigma}{\partial t}=0.$$

Le courant de conduction est dit *uniforme* si chaque dernier terme de (56) et (57) est nul; il est dit *permanent* s'il est uniforme et constant.

Le vecteur J variant avec le temps, on fait correspondre, à chaque point M d'un corps diélectrique en repos par rapport aux axes de coordonnées, le vecteur de composantes $\frac{\partial A}{\partial t}$, $\frac{\partial B}{\partial t}$, $\frac{\partial C}{\partial t}$, d'origine M, appelé *densité du courant de polarisation* en M. Il est facile de vérifier que ce vecteur est de même nature que le précédent (u, v, w). Si le corps est à la fois conducteur et diélectrique, ce qui est le cas général, les composantes de la *densité du courant total* en un point de ce corps sont

$$(58)\qquad f=u+\frac{\partial A}{\partial t},\qquad g=v+\frac{\partial B}{\partial t},\qquad h=w+\frac{\partial C}{\partial t}.$$

Il résulte alors de (29), (56), (57) et (58) qu'on a

$$(59)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}+\frac{\partial(e+E)}{\partial t}=0$$

en chaque point d'un milieu continu en repos, et

$$(60)\qquad f_1\alpha_1+g_1\beta_1+h_1\gamma_1+f_2\alpha_2+g_2\beta_2+h_2\gamma_2+\frac{\partial(\sigma+\Sigma)}{\partial t}=0$$

en chaque point d'une surface séparative de deux milieux en repos 1 et 2. Le courant total est dit *uniforme* si chaque dernier terme de (59) et (60) est nul. Or on a, d'après (28),

$$(61)\qquad \frac{\partial V}{\partial t}=\int\frac{\partial(e+E)}{\partial t}\frac{d\varpi}{r}+\int\frac{\partial(\sigma+\Sigma)}{\partial t}\frac{dS}{r}.$$

Le courant total ne saurait donc être constamment uniforme, sans quoi le potentiel électrique du système resterait invariable.

L'égalité (61) s'écrit encore, d'après (59) et (60),

$$(61') \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = -\int \left| \frac{\partial f}{\partial \xi} \right| \frac{d\varpi}{r} - \int \left| f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 \right| \frac{d\mathrm{S}}{r}.$$

Un *courant linéaire* est celui qui traverse un fil, auquel le vecteur (f, g, h) est partout tangent; le produit I de ce vecteur par la section ω du fil en un point M est l'*intensité du courant linéaire* en ce point; l'égalité (59) devient alors

$$(62) \qquad \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial s} + \frac{\partial (e + \mathrm{E})}{\partial t} \omega = 0,$$

ou, d'après (59),

$$(63) \qquad \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial s} - \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) \omega = 0,$$

s étant l'abscisse curviligne du point M comptée le long du fil, et I la valeur algébrique de l'intensité suivant la tangente en M dans le sens des s croissants; l'égalité (60) devient de même

$$(64) \qquad - \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \frac{\partial (\sigma + \Sigma)}{\partial t} \omega = 0.$$

Les équations (62) et (64) montrent que l'intensité d'un courant linéaire uniforme est constante tout le long du fil et que l'intensité d'un courant ouvert peut être différente de zéro aux extrémités du fil.

Au lieu de la densité du courant de polarisation $\frac{\partial (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})}{\partial t}$ considérée par Helmholtz, Maxwell considère la *densité du courant de déplacement*

$$\frac{\mathrm{K}}{4\pi\epsilon} \frac{\partial (\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})}{\partial t} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K} - 1} \frac{\partial (\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})}{\partial t},$$

d'après (44) et (46). Cette dernière expression montre que le courant de polarisation se confond sensiblement avec le courant de déplacement, si le pouvoir inducteur spécifique est très grand par rapport à l'unité.

L'égalité (39) appliquée à la variation réelle d'un système

en repos s'écrit

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \varepsilon \int V \frac{\partial(e + E)}{\partial t} d\varpi + \varepsilon \int V \frac{\partial(\sigma + \Sigma)}{\partial t} dS,$$

d'où, d'après (59), (60) et une intégration par parties,

$$(65) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} = \varepsilon \int \left| \int \frac{\partial V}{\partial x} \right| d\varpi.$$

Un calcul analogue donne, d'après (54), (56), (57) et en supposant la température indépendante de t,

$$(66) \qquad \frac{\partial M}{\partial t} = \int \left| u \frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta - T\frac{\partial \Theta}{\partial T}\right) \right| d\varpi.$$

12. *Lois d'Ohm et de Joule.* — Considérons un système en repos, dont la température et l'état de polarisation diélectrique et magnétique sont indépendants de t et où, par suite, les courants de polarisation sont nuls; les courants de conduction supposés permanents sont déterminés par la *loi d'Ohm*

$$(67) \qquad \rho(u, v, w) = (E_x, E_y, E_z),$$

ρ étant la *résistivité* au point (x, y, z), E_x, E_y, E_z les composantes de la *force électromotrice totale* en ce point définies par les égalités

$$(68) \qquad (E_x, E_y, E_z) = -\frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial(x, y, z)} + (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z),$$

φ_x, φ_y, φ_z étant les composantes de la *force électromotrice hydro-électrique* au même point.

Le système étant immobile, le travail élémentaire des forces extérieures qui lui sont appliquées et sa force vive sont constamment nuls; on a donc, d'après le premier principe de la Thermodynamique, $dQ = -dU$, dQ étant la quantité de chaleur dégagée par le système pendant le temps dt, dU la variation correspondante de son énergie interne.

Or, les courants étant invariables, Duhem admet que dU est calculable par (53), ce qui donne, d'après (65), (66) et les hypothèses faites sur l'état du système,

$$(69) \qquad \mathfrak{E}\, dQ = -\mathfrak{E}\, dU_0 - dt \int \left| u \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon V + \Theta - T\frac{\partial \Theta}{\partial T}\right) \right| d\varpi.$$

Mais on a, d'après (68),

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon V - \Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right) = \varphi_x - T\frac{\partial\varphi_x}{\partial T} - E_x + T\frac{\partial E_x}{\partial T} - \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial\Theta}{\partial T}$$

et, d'après la théorie des forces électromotrices hydro-électriques,

$$(70)\qquad \mathfrak{E}\, dU_0 + dt\int\left|u\left(\varphi_x - T\frac{\partial\varphi_x}{\partial T}\right)\right| d\varpi = 0;$$

de sorte que (69) devient

$$(71)\qquad \mathfrak{E}\, dQ = dt\int\left|u\left(E_x - T\frac{\partial E_x}{\partial T} + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)\right| d\varpi.$$

Cette égalité exprime ce que nous appellerons la *loi de Joule;* en tenant compte de (67) et (68), elle s'écrit encore

$$\mathfrak{E}\, dQ = dt\int\left(\rho|u^2| + T\left|u\frac{\partial^2\Theta}{\partial x\,\partial T}\right| + \frac{\partial\Theta}{\partial T}\left|u\frac{\partial T}{\partial x}\right| - T\left|u\frac{\partial\varphi_x}{\partial T}\right|\right) d\varpi;$$

le premier terme sous le signe somme correspond à l'effet Joule, le second à l'effet Peltier, le troisième à l'effet Thomson, le quatrième à la chaleur chimique des sources hydro-électriques.

13. *Induction électrodynamique et électromagnétique; loi de Joule généralisée.* — Lorsque les conditions imposées au système au début du n° 12 ne sont pas remplies, les formules (67) exprimant la loi d'Ohm subsistent, à condition de remplacer les égalités (68) par les suivantes :

$$(72)\qquad (E_x, E_y, E_z) = -\frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial(x, y, z)} + (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z) + (\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z),$$

$(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z)$ étant un vecteur appelé *force électromotrice d'induction* au point (x, y, z). Duhem admet alors que l'égalité (71) doit être remplacée par la suivante :

$$(73)\qquad \mathfrak{E}\, dQ = dt\int\left|u\left(E_x - T\frac{\partial E_x}{\partial T} + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)\right| d\varpi + d\int T\frac{\partial(\mathcal{J} + \mathfrak{f})}{\partial T}\, d\varpi,$$

qui exprime la *loi de Joule généralisée.*

14. *Induction électrodynamique entre courants linéaires; équivalence des feuillets magnétiques et des courants uniformes.* — La position mutuelle de deux éléments linéaires $MM_1 = ds$, $M'M'_1 = ds'$, parcourus par des courants I, I' comptés positivement de M vers M_1 et de M' vers M'_1, est définie par leur distance $MM' = r$, les angles θ, θ' de MM_1, $M'M'_1$ avec MM' et l'angle ω de MM_1, $M'M'_1$.

Supposons que ds, ds' appartiennent à deux courbes fermées C, C'; faisons choix d'un sens de parcours positif le long de C, C' et soient S, S' deux surfaces arbitraires ayant C, C' pour contours, n, n' les *normales positives* en un point de ces surfaces, c'est-à-dire menées dans le sens de pénétration de deux tire-bouchons traversant chaque surface en tournant dans le sens positif le long de C, C'; on a

$$(74)\qquad \int\int \frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,ds' = \int\int \frac{\cos\omega}{r}\,ds\,ds' = -\int\int \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n\,\partial n'}\,dS\,dS'.$$

Cela posé, la force électromotrice induite dans l'élément ds par l'élément de courant (I', ds') a pour valeur, d'après Helmholtz et Duhem,

$$(75)\qquad -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right)I'\,ds\,ds'\right],$$

$\frac{\mathfrak{A}^2}{2}$ étant une constante dite *constante fondamentale des actions électrodynamiques*, λ une constante numérique appelée *constante de Helmholtz* et d désignant la variation totale éprouvée par la quantité entre crochets pendant le temps dt. Remarquons que cette expression ne dépend que du changement de position relative des deux éléments ds, ds' et nullement de leur mouvement absolu.

L'*énergie électrodynamique* des deux éléments de courants (I, ds), (I', ds') est, d'autre part,

$$(76)\qquad d\Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}II'\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right)ds\,ds',$$

le travail élémentaire des forces électrodynamiques s'exerçant entre les deux éléments étant égal à la variation

changée de signe de $d\Pi$, calculée en laissant I et I′ constants.

Si l'on suppose I′ uniforme, I′ est constant tout le long de C′; de sorte que la force électromotrice totale $\mathcal{E}$ induite dans C par C′ est, d'après (75) et (74),

$$(77)\qquad \mathcal{E} = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{d}{dt}\mathrm{I}'\int\int\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial n\,\partial n'}dS\,dS',$$

et, si les deux courants sont uniformes, le potentiel électrodynamique des deux circuits est, d'après (76) et (74),

$$(78)\qquad \Pi = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mathrm{I}\mathrm{I}'\int\int\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial n\,\partial n'}dS\,dS'.$$

La comparaison de (14) et (78) montre alors que le potentiel mutuel de deux feuillets magnétiques coïncide avec l'énergie électrodynamique de deux circuits parcourus par des courants uniformes, si les feuillets ont même contour et même face positive que les circuits et si l'on a

$$(79)\qquad \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathrm{I} = \sqrt{\epsilon'}\,\mathfrak{P}, \qquad \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\mathrm{I}' = \sqrt{\epsilon'}\,\mathfrak{P}',$$

moyennant quoi, (15) s'écrit

$$\Phi = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\epsilon'}\,\mathrm{I}'\int\int\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial n\,\partial n'}dS\,dS',$$

de sorte que (77) devient

$$(80)\qquad \mathcal{E} = -\frac{\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\epsilon'}}\frac{d\Phi}{dt},$$

valeur qu'on démontre égale à la force électromotrice que le feuillet $\mathfrak{P}'$ induirait dans C. Un feuillet magnétique est donc équivalent à un courant uniforme I de même contour, dont la face positive coïncide avec celle du feuillet et dont la puissance $\mathfrak{P}$ est définie par la première (79).

CHAPITRE II.

L'INDUCTION ÉLECTRODYNAMIQUE ET ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

---

15. *Composantes de la force électromotrice élémentaire d'induction électrodynamique en un point, suivant les axes principaux de dilatation en ce point.* — D'après (75), la force électromotrice $e\,ds'$ induite dans l'élément ds' par l'élément de courant (I, ds) est

$$(81)\qquad e\,ds'\,dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\delta\left[\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right)\mathrm{I}\,ds\,ds'\right],$$

δ étant la variation éprouvée par la quantité entre crochets pendant le temps dt.

Cela posé, soit $e_x\,dx$ la force électromotrice induite dans l'élément dx parallèle à Ox et d'origine $\mathrm{M}(x, y, z)$, par le courant total traversant une particule $d\varpi$ du système; on admet que les composantes de la force électromotrice d'induction électrodynamique en M ont pour expressions

$$(82)\qquad (\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z) = \int (e_x, e_y, e_z),$$

e_y, e_z ayant des significations analogues à e_x et les intégrations s'étendant au système entier.

Calculons tout d'abord e_x, e_y, e_z, en prenant comme axes de coordonnées les axes principaux de dilatation $\mathrm{M}xyz$ en M.

Pour pouvoir appliquer (81), prenons $d\varpi = d\mathrm{S}\,ds$, $d\mathrm{S}$ étant la section d'un élément de conducteur linéaire $\mathrm{PP}_1 = ds$ dirigé suivant la densité C du courant total en P de composantes f, g, h; l'intensité I du courant qui parcourt ds est ainsi $\mathrm{I} = \mathrm{C}\,d\mathrm{S}$, d'où $\mathrm{I}\,ds = \mathrm{C}\,d\varpi$. Soient, d'autre part, α, β, γ les cosinus directeurs de ds, l, m, n ceux de MP; on a, puisque dx joue le rôle de l'élément ds',

$$\cos\omega = \alpha,\qquad \cos\theta = l\alpha + m\beta + n\gamma,\qquad \cos\theta' = l,$$

de sorte que (81) donne, en remarquant que

$$(f, g, h) = \mathrm{C}(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$e_x\,dx\,dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\delta\left\{\left[\frac{1+\lambda}{2r}f + \frac{1-\lambda}{2r}l(lf+mg+nh)\right]d\varpi\,dx\right\},$$

ou encore

$$(83)\quad e_x\,dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\delta\left\{\left[\frac{1+\lambda}{2r}f + \frac{1-\lambda}{2r}l(lf+mg+nh)\right]d\varpi\right\}$$
$$-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\frac{1+\lambda}{2r}f + \frac{1-\lambda}{2r}l(lf+mg+nh)\right]\partial_1\,d\varpi,$$

$\partial_1 = \frac{\delta\,dx}{dx}$ désignant la dilatation principale en M suivant Mx éprouvée par l'élément $d\varpi$ pendant le temps dt.

Si donc on pose

$$(84)\quad (\mathfrak{f}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}) = \frac{1+\lambda}{2r}(f, g, h) + \frac{1-\lambda}{2r}(l, m, n)(lf+mg+nh),$$

l'égalité (83) devient la première des suivantes :

$$(85)\quad \begin{cases} e_x\,dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}[\delta(\mathfrak{f}\,d\varpi) + \mathfrak{f}\,\partial_1\,d\varpi], \\ e_y\,dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}[\delta(\mathfrak{G}\,d\varpi) + \mathfrak{G}\,\partial_2\,d\varpi], \\ e_z\,dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}[\delta(\mathfrak{H}\,d\varpi) + \mathfrak{H}\,\partial_3\,d\varpi], \end{cases}$$

∂_2, ∂_3 désignant les deux autres dilatations principales au point M.

16. *Composantes de la force électromotrice élémentaire d'induction électrodynamique suivant des axes quelconques.* — Soient, par rapport à un nouveau système d'axes quelconques $O_1x_1y_1z_1$, α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'' les cosinus directeurs des anciens axes Mx, My, Mz; x, y, z; ξ, η, ζ les coordonnées de M et de P, de sorte que

$$r^2 = |(\xi - x)^2|;$$

e_{x_1}, e_{y_1}, e_{z_1}; f_1, g_1, h_1; $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{H}_1$ les nouvelles composantes

des vecteurs (e_x, e_y, e_z), (f, g, h), $(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H})$. On a

$$(86)\quad (e_{x_1}, e_{y_1}, e_{z_1}) = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)\, e_x + (\alpha', \beta', \gamma')\, e_y + (\alpha'', \beta'', \gamma'')\, e_z,$$
$$(87)\quad (f,\ g,\ h) = (\alpha, \alpha', \alpha'')\, f_1 + (\beta, \beta', \beta'')\, g_1 + (\gamma, \gamma', \gamma'')\, h_1,$$
$$(87')\quad (f_1, g_1, h_1) = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)\, f + (\alpha', \beta', \gamma')\, g + (\alpha'', \beta'', \gamma'')\, h,$$
$$(88)\quad (\mathfrak{F},\ \mathfrak{G},\ \mathfrak{H}) = (\alpha, \alpha', \alpha'')\, \mathfrak{F}_1 + (\beta, \beta', \beta'')\, \mathfrak{G}_1 + (\gamma, \gamma', \gamma'')\, \mathfrak{H}_1,$$
$$(88')\quad (\mathfrak{F}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}_1) = (\alpha,\ \beta,\ \gamma)\, \mathfrak{F} + (\alpha', \beta', \gamma')\, \mathfrak{G} + (\alpha'', \beta'', \gamma'')\, \mathfrak{H}.$$

On en déduit, d'après (84) et (87'),

$$(89)\quad \mathfrak{F}_1 = \frac{1+\lambda}{2r} f_1 + \frac{1-\lambda}{2r} (l\alpha + m\alpha' + n\alpha'')(lf + mg + nh).$$

Or, on a

$$(90)\quad l(\alpha, \beta, \gamma) + m(\alpha', \beta', \gamma') + n(\alpha'', \beta'', \gamma'') = \frac{(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)}{r}$$

et, d'après (87) et (90),

$$lf + mg + nh = \frac{\xi - x}{r} f_1 + \frac{\eta - y}{r} g_1 + \frac{\zeta - z}{r} h_1,$$

de sorte que (89) devient la première des égalités

$$(91)\quad (\mathfrak{F}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}_1) = \frac{1+\lambda}{2r} (f_1, g_1, h_1) + \frac{1-\lambda}{2r} \left(\frac{\xi - x}{r} f_1 + \frac{\eta - y}{r} g_1 + \frac{\zeta - z}{r} h_1 \right) \times \frac{(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)}{r}.$$

On a d'autre part, d'après (85) et (86),

$$(92)\quad -\frac{2}{\mathfrak{A}^2} e_{x_1}\, dt = \alpha\, \delta(\mathfrak{F}\, d\varpi) + \alpha'\, \delta(\mathfrak{G}\, d\varpi) + \alpha''\, \delta(\mathfrak{H}\, d\varpi) + (\alpha \mathfrak{F} \partial_1 + \alpha' \mathfrak{G} \partial_2 + \alpha'' \mathfrak{H} \partial_3)\, d\varpi$$

et, d'après (88'),

$$\delta(\mathfrak{F}_1\, d\varpi) = \alpha\, \delta(\mathfrak{F}\, d\varpi) + \alpha'\, \delta(\mathfrak{G}\, d\varpi) + \alpha''\, \delta(\mathfrak{H}\, d\varpi) + (\mathfrak{F}\, \delta\alpha + \mathfrak{G}\, \delta\alpha' + \mathfrak{H}\, \delta\alpha'')\, d\varpi,$$

de sorte que (92) devient

$$(93)\quad -\frac{2}{\mathfrak{A}^2} e_{x_1}\, dt = \delta(\mathfrak{F}_1\, d\varpi) + [\mathfrak{F}(\alpha \partial_1 - \delta\alpha) + \mathfrak{G}(\alpha' \partial_2 - \delta\alpha') + \mathfrak{H}(\alpha'' \partial_3 - \delta\alpha'')]\, d\varpi.$$

Mais, $\omega, \omega', \omega''$ désignant les composantes suivant $O_1x_1y_1z_1$ de la rotation moyenne du trièdre $Mxyz$ pendant le temps dt, on a

$$\delta(\alpha, \alpha', \alpha'') = (\gamma, \gamma', \gamma'')\omega' - (\beta, \beta', \beta'')\omega'',$$

d'où, d'après (88'),

$$\mathfrak{F}\,\delta\alpha + \mathfrak{G}\,\delta\alpha' + \mathfrak{H}\,\delta\alpha'' = \mathfrak{H}_1\omega' - \mathfrak{G}_1\omega''.$$

L'égalité (93) devient ainsi, d'après (88),

$$(94)\quad -\frac{2}{\mathfrak{R}^2}e_{x_1}\,dt = \delta(\mathfrak{F}_1\,d\varpi) + [\quad \mathfrak{F}_1(\alpha^2\,\partial_1 + \alpha'^2\,\partial_2 + \alpha''^2\,\partial_3)$$
$$+ \mathfrak{G}_1(\alpha\beta\,\partial_1 + \alpha'\beta'\partial_2 + \alpha''\beta''\partial_3)$$
$$+ \mathfrak{H}_1(\alpha\gamma\,\partial_1 + \alpha'\gamma'\partial_2 + \alpha''\gamma''\partial_3)$$
$$- \mathfrak{H}_1\omega' + \mathfrak{G}_1\omega''\,]\,d\varpi.$$

Or, la Cinématique des milieux continus nous enseigne que les dilatations principales en M sont liées aux composantes δx, δy, δz du déplacement de ce point suivant les axes $O_1x_1y_1z_1$ par les relations

$$(95)\quad \begin{cases} \alpha^2\partial_1 + \alpha'^2\,\partial_2 + \alpha''^2\,\partial_3 = \dfrac{\partial\,\delta x}{dx}, \\ \alpha\beta\partial_1 + \alpha'\beta'\partial_2 + \alpha''\beta''\partial_3 = \dfrac{\partial\,\delta y}{dx} - \omega'', \\ \alpha\gamma\partial_1 + \alpha'\gamma'\partial_2 + \alpha''\gamma''\partial_3 = \dfrac{\partial\,\delta z}{dx} + \omega' \quad (^1); \end{cases}$$

---

(1) Les formules (95) peuvent être établies comme il suit : soient a, b, c les composantes du déplacement subi par M pendant le temps dt, suivant les axes principaux de dilatation en ce point, désignés par $Mxyz$ au n° 15 et que nous désignerons ici par $M\xi\eta\zeta$; on a

$$(A)\quad \begin{cases} \partial_1 = \dfrac{\partial a}{\partial\xi}, \qquad \partial_2 = \dfrac{\partial b}{\partial\eta}, \qquad \partial_3 = \dfrac{\partial c}{\partial\zeta}; \\ \dfrac{\partial c}{\partial\eta} + \dfrac{\partial b}{\partial\zeta} = 0, \qquad \dfrac{\partial a}{\partial\zeta} + \dfrac{\partial c}{\partial\xi} = 0, \qquad \dfrac{\partial b}{\partial\xi} + \dfrac{\partial a}{\partial\eta} = 0. \end{cases}$$

Les composantes Ω, Ω', Ω'' de la rotation moyenne en M suivant les mêmes axes sont alors

$$(B)\quad \begin{cases} \Omega = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial c}{\partial\eta} - \dfrac{\partial b}{\partial\zeta}\right) = \dfrac{\partial c}{\partial\eta} = -\dfrac{\partial b}{\partial\zeta}, \\ \Omega' = \dfrac{\partial a}{\partial\zeta} = -\dfrac{\partial c}{\partial\xi}, \qquad \Omega'' = \dfrac{\partial b}{\partial\xi} = -\dfrac{\partial a}{\partial\eta}. \end{cases}$$

D'autre part, les composantes $\delta(x, y, z)$ du déplacement de M

l'égalité (94) devient ainsi la première des suivantes :

$$(96)\quad \begin{cases} e_x\,dt = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\delta(\mathfrak{f}\,d\varpi) + \left(\mathfrak{f}\dfrac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \mathfrak{G}\dfrac{\partial\,\delta y}{\partial x} + \mathfrak{H}\dfrac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)d\varpi\right], \\ e_y\,dt = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\delta(\mathfrak{G}\,d\varpi) + \left(\mathfrak{f}\dfrac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \mathfrak{G}\dfrac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \mathfrak{H}\dfrac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right)d\varpi\right], \\ e_z\,dt = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\delta(\mathfrak{H}\,d\varpi) + \left(\mathfrak{f}\dfrac{\partial\,\delta x}{\partial z} + \mathfrak{G}\dfrac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \mathfrak{H}\dfrac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)d\varpi\right], \end{cases}$$

où nous avons effacé l'indice 1 désormais inutile au bas des nouveaux axes $Oxyz$ et de toutes les quantités qui s'y rapportent. D'après (91), les fonctions $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ figurant dans (96) sont donc définies par les formules

$$(97)\quad \begin{cases} \mathfrak{f} = \dfrac{1+\lambda}{2r}f + \dfrac{1-\lambda}{2r}\left(\dfrac{\xi-x}{r}f + \dfrac{\eta-y}{r}g + \dfrac{\zeta-z}{r}h\right)\dfrac{\xi-x}{r}, \\ \mathfrak{G} = \dfrac{1+\lambda}{2r}g + \dfrac{1-\lambda}{2r}\left(\dfrac{\xi-x}{r}f + \dfrac{\eta-y}{r}g + \dfrac{\zeta-z}{r}h\right)\dfrac{\eta-y}{r}, \\ \mathfrak{H} = \dfrac{1+\lambda}{2r}h + \dfrac{1-\lambda}{2r}\left(\dfrac{\xi-x}{r}f + \dfrac{\eta-y}{r}g + \dfrac{\zeta-z}{r}h\right)\dfrac{\zeta-z}{r}, \end{cases}$$

où f, g, h sont des fonctions de t et des coordonnées ξ, η, ζ de l'élément $d\varpi$.

---

suivant les axes quelconques $O, x_1 y_1 z_1$ sont

$$\delta(x, y, z) = (\alpha, \beta, \gamma)a + (\alpha', \beta', \gamma')b + (\alpha'', \beta'', \gamma'')c$$

et, comme

$$\frac{\partial}{\partial x} = \alpha\frac{\partial}{\partial\xi} + \alpha'\frac{\partial}{\partial\eta} + \alpha''\frac{\partial}{\partial\zeta},$$

on a, d'après (A) et (B) et en tenant compte des relations entre les cosinus,

$$(C)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\,\delta x}{\partial x} = \alpha^2\,\partial_1 + \alpha'^2\,\partial_2 + \alpha''^2\,\partial_3, \\ \dfrac{\partial\,\delta y}{\partial x} = \alpha\beta\partial_1 + \alpha'\beta'\partial_2 + \alpha''\beta''\partial_3 + \gamma\Omega + \gamma'\Omega' + \gamma''\Omega'', \\ \dfrac{\partial\,\delta z}{\partial x} = \alpha\gamma\partial_1 + \alpha'\gamma'\partial_2 + \alpha''\gamma''\partial_3 - \beta\Omega - \beta'\Omega' - \beta''\Omega''. \end{cases}$$

Mais comme

$$(\omega, \omega', \omega'') = (\alpha, \beta, \gamma)\Omega + (\alpha', \beta', \gamma')\Omega' + (\alpha'', \beta'', \gamma'')\Omega'',$$

les formules (C) deviennent immédiatement celles (95) du texte.

17. *Composantes de la force électromotrice d'induction électrodynamique; potentiel vecteur électrique.* — D'après (82), (96) et (97), les composantes ($\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$) de la force électromotrice d'induction électrodynamique au point $M(x, y, z)$ sont données par les formules

$$(98)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_x\, dt = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta F + F\dfrac{\partial\,\delta x}{dx} + G\dfrac{\partial\,\delta y}{dx} + H\dfrac{\partial\,\delta z}{dx}\right), \\ \mathcal{E}_y\, dt = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta G + F\dfrac{\partial\,\delta x}{dy} + G\dfrac{\partial\,\delta y}{dy} + H\dfrac{\partial\,\delta z}{dy}\right), \\ \mathcal{E}_z\, dt = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta H + F\dfrac{\partial\,\delta x}{dz} + G\dfrac{\partial\,\delta y}{dz} + H\dfrac{\partial\,\delta z}{dz}\right), \end{cases}$$

où F, G, H sont les fonctions de x, y, z, t définies par les formules

$$(99)\quad \begin{cases} F = \displaystyle\int\left[\frac{1+\lambda}{2r}f + \frac{1-\lambda}{2r}\left(\frac{\xi-x}{r}f + \frac{\eta-y}{r}g + \frac{\zeta-z}{r}h\right)\frac{\xi-x}{r}\right]d\varpi, \\ G = \displaystyle\int\left[\frac{1+\lambda}{2r}g + \frac{1-\lambda}{2r}\left(\frac{\xi-x}{r}f + \frac{\eta-y}{r}g + \frac{\zeta-z}{r}h\right)\frac{\eta-y}{r}\right]d\varpi, \\ H = \displaystyle\int\left[\frac{1+\lambda}{2r}h + \frac{1-\lambda}{2r}\left(\frac{\xi-x}{r}f + \frac{\eta-y}{r}g + \frac{\zeta-z}{r}h\right)\frac{\zeta-z}{r}\right]d\varpi, \end{cases}$$

f, g, h étant des fonctions de t et des variables d'intégration ξ, η, ζ; ces fonctions F, G, H sont les composantes d'un vecteur d'origine M appelé *potentiel vecteur électrique* en ce point. p 35 p 53 n. 81

Comme d'ailleurs

$$\begin{aligned} \delta F &= \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z + \frac{\partial F}{\partial t}dt \\ &= \left(a\frac{\partial F}{\partial x} + b\frac{\partial F}{\partial y} + c\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t}\right)dt, \end{aligned}$$

a, b, c étant les composantes de la vitesse du point M par rapport aux axes $Oxyz$ considérés, les formules (98) s'écrivent

$$\mathcal{E}_x = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + a\frac{\partial F}{\partial x} + b\frac{\partial F}{\partial y} + c\frac{\partial F}{\partial z} + F\frac{\partial a}{\partial x} + G\frac{\partial b}{\partial x} + H\frac{\partial c}{\partial x}\right),$$

....,

ou encore

$$(100)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_x = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\dfrac{\partial F}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(aF + bG + cH)\right] + \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(b\mathfrak{R} - c\mathfrak{Q}), \\ \mathcal{E}_y = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\dfrac{\partial G}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial y}(aF + bG + cH)\right] + \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(c\mathfrak{P} - a\mathfrak{R}), \\ \mathcal{E}_z = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\dfrac{\partial H}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial z}(aF + bG + cH)\right] + \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(a\mathfrak{Q} - b\mathfrak{P}), \end{cases}$$

en posant

$$(101)\quad \begin{cases} \mathfrak{P} = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial H}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial z}\right), \\ \mathfrak{Q} = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial H}{\partial x}\right), \\ \mathfrak{R} = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\partial G}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Remarquons que les expressions (100) sont valables pour un système animé d'un mouvement quelconque, sauf que le courant total figurant dans (99) n'est plus donné par les formules (58), qui supposent essentiellement le système en repos.

18. *La fonction* $\mathcal{V}(x, y, z, t)$. — La fonction

$$\mathcal{V}(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t}\,\frac{d\varpi}{r}$$

est continue dans tout l'espace ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres; on en déduit

$$(102)\qquad \Delta\mathcal{V} = 2\frac{\partial V}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V}{\partial t}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,d\varpi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V}{\partial t}\,\Delta\frac{\partial r}{\partial x}\,d\varpi,$$

car $\Delta r = \frac{2}{r}$. En appliquant la formule de Green et en remarquant que $\frac{\partial r}{\partial n_1} + \frac{\partial r}{\partial n_2}$ est nul sur chaque surface séparative S, il vient

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial r}{\partial x}\,\Delta\frac{\partial V}{\partial t}\,d\varpi - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial r}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2}\right)dS.$$

Or on a, d'après (61), (32) et (29),

$$\Delta\frac{\partial V}{\partial t}=-4\pi\frac{\partial(e+E)}{\partial t},\qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial n_1}+\frac{\partial V}{\partial n_2}\right)=-4\pi\frac{\partial(\sigma+\Sigma)}{\partial t},$$

d'où

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}=\int\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial(e+E)}{\partial t}d\varpi+\int\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial(\sigma+\Sigma)}{\partial t}dS.$$

Cette égalité est entièrement générale; supposons maintenant le système en repos par rapport aux axes $Oxyz$ auxquels il est rapporté : elle devient, d'après les équations de continuité (59) et (60),

$$(103)\qquad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}=-\int\frac{\partial r}{\partial x}\left|\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|d\varpi-\int\frac{\partial r}{\partial x}|f_1\alpha_1+f_2\alpha_2|\,dS$$

et, en intégrant par parties,

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}=\int\left(f\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial\xi}+g\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial\eta}+h\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial\zeta}\right)d\varpi.$$

Or, il résulte de l'expression $r^2=|(x-\xi)^2|$ qu'on a

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial\xi}=-\frac{1}{r}+\frac{(\xi-x)^2}{r^3},\qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial\eta}=\frac{(\xi-x)(\eta-y)}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial\zeta}=\frac{(\xi-x)(\zeta-z)}{r^3},$$

d'où

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}=\int\left[-f+\left(\frac{\xi-x}{r}f+\frac{\eta-y}{r}g+\frac{\zeta-z}{r}h\right)\frac{\xi-x}{r}\right]\frac{d\varpi}{r}.$$

Cette expression, comparée à la première (99), donne la première des égalités

$$(104)\qquad (F,G,H)=\int\frac{(f,g,h)}{r}d\varpi+\frac{1-\lambda}{2}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial(x,y,z)},$$

où f, g, h sont des fonctions de t et des variables d'intégration ξ, η, ζ.

19. *Propriétés du potentiel vecteur électrique.* — Les égalités (104) montrent que les fonctions F, G, H et leurs dérivées partielles du premier ordre sont continues dans tout

l'espace; on en déduit

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| = \int \left| f \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right| d\varpi + \frac{1-\lambda}{2} \Delta \mho.$$

Mais on a, en intégrant par parties,

$$\int \left| f \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right| d\varpi = -\int \left| f \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right| d\varpi$$
$$= \int \left| \frac{\partial f}{\partial \xi} \right| \frac{d\varpi}{r} + \int | f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 | \frac{dS}{r} = -\frac{\partial V}{\partial t}$$

d'après (61′); d'où, d'après (102),

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = -\lambda \frac{\partial V}{\partial t}. \tag{105}$$

D'autre part, la première (104) donne

$$\Delta F = -4\pi f + \frac{1-\lambda}{2} \frac{\partial \Delta \mho}{\partial x},$$

d'où, d'après (102), la première des formules

$$\Delta(F, G, H) = -4\pi(f, g, h) + (1-\lambda) \frac{\partial^2 V}{\partial(x, y, z)\, \partial t}. \tag{106}$$

Enfin, les formules (101) s'écrivent, d'après (104),

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{P}(x, y, z, t) &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int \left(h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi, \\
\mathfrak{Q}(x, y, z, t) &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int \left(f \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) d\varpi, \\
\mathfrak{R}(x, y, z, t) &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int \left(g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - f \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) d\varpi,
\end{aligned}\right. \tag{107}$$

où f, g, h sont des fonctions de ξ, η, ζ, t.

20. ***Potentiel vecteur magnétique et potentiel vecteur total.*** — Les conditions d'équivalence des feuillets magnétiques et des courants uniformes (n° 14) conduisent à énoncer le postulat suivant :

Tout élément magnétique engendre la même force

électromotrice d'induction que le courant uniforme équivalent au feuillet magnétique de même volume et de même intensité d'aimantation que l'élément considéré.

Soit alors $d\varpi$ un élément magnétique du système au point (ξ, η, ζ) où l'intensité d'aimantation est $\mathfrak{I}$; l'intensité I du courant uniforme équivalent au feuillet de puissance Φ est donnée par la première (79). Or, dS étant la surface du feuillet et l son épaisseur, on a $\Phi = l\mathfrak{I}$, $d\varpi = l\,dS$; de sorte que (79) devient

$$(108) \qquad \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{I}\,dS = \sqrt{\varepsilon'}\,\mathfrak{I}\,d\varpi.$$

Le courant I étant uniforme, (103) montre que les dérivées du premier ordre en x, y, z de la fonction $\mho$ relative à ce courant sont nulles; le potentiel vecteur du courant I est donc, d'après (104),

$$(109) \qquad (\mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H}) = \int \frac{(f, g, h)}{r}\,d\varpi',$$

l'intégration étant étendue au volume du circuit fermé C qui borde l'élément dS.

Soit alors $d\varpi' = \omega\,ds$ un tronçon de C, de longueur ds et de section ω, au point (ξ, η, ζ); comme $\omega f = \mathrm{I}\frac{d\xi}{ds}$, on a $f\,d\varpi' = \mathrm{I}\,d\xi$, de sorte que la première (109) donne, d'après (108),

$$\mathrm{F} = \mathrm{I}\int\frac{d\xi}{r} = \mathrm{I}\left(\gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} - \beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)dS$$

$$= \frac{\sqrt{\varepsilon'}}{\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}}\,\mathfrak{I}\left(\gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} - \beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)d\varpi,$$

la première intégrale s'étendant au circuit fermé C, la seconde expression résultant de l'application de la formule de Stokes à ce circuit infiniment petit et α, β, γ désignant les cosinus directeurs de la normale positive à dS [1]. Si l'on remarque que α, β, γ sont précisément les cosinus directeurs

---

[1] Les axes de coordonnées $Oxyz$ sont supposés avoir la disposition habituelle, c'est-à-dire telle qu'un observateur, les pieds en O et placé suivant Oz, voie s'effectuer de sa gauche vers sa droite la plus petite rotation amenant Ox sur Oy

de $\mathfrak{J}$, on voit que $\mathfrak{J}\gamma = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{J}\beta = \mathfrak{B}$; si donc on pose

$$(110)\quad \begin{cases} \Phi(x,y,z,t) = \displaystyle\int\left(\mathfrak{C}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} - \mathfrak{B}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)d\varpi, \\ \Psi(x,y,z,t) = \displaystyle\int\left(\mathfrak{A}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta} - \mathfrak{C}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\right)d\varpi, \\ \Omega(x,y,z,t) = \displaystyle\int\left(\mathfrak{B}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} - \mathfrak{A}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\right)d\varpi, \end{cases}$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ étant des fonctions de ξ, η, ζ, t et les intégrations s'étendant au système entier, les fonctions F, G, H dues à l'aimantation du système seront respectivement

$$(111)\quad \frac{\sqrt{\varepsilon'}}{\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}}(\Phi, \Psi, \Omega).$$

Le vecteur de composantes Φ, Ψ, Ω est le *potentiel vecteur magnétique* au point (x, y, z).

Les composantes de la force électromotrice d'induction électromagnétique sont alors données par (98) ou (100) et (101), où l'on a remplacé F, G, H par les fonctions (111).

On appelle *potentiel vecteur total* au point (x, y, z) le vecteur ayant pour composantes

$$(112)\quad (\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}) = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(F, G, H) + \sqrt{\varepsilon'}(\Phi, \Psi, \Omega) \quad (^1);$$

les composantes $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ de la force électromotrice totale d'induction, tant électrodynamique qu'électromagnétique, sont ainsi, d'après (98),

$$(113)\quad \begin{cases} \mathcal{E}_x\,dt = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\delta\mathfrak{F} + \mathfrak{F}\dfrac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \mathfrak{G}\dfrac{\partial\,\delta y}{\partial x} + \mathfrak{H}\dfrac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right), \\ \mathcal{E}_y\,dt = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\delta\mathfrak{G} + \mathfrak{F}\dfrac{\partial\,\delta x}{\partial y} + \mathfrak{G}\dfrac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \mathfrak{H}\dfrac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right), \\ \mathcal{E}_z\,dt = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\delta\mathfrak{H} + \mathfrak{F}\dfrac{\partial\,\delta x}{\partial z} + \mathfrak{G}\dfrac{\partial\,\delta y}{\partial z} + \mathfrak{H}\dfrac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right), \end{cases}$$

(1) Duhem appelle les fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, les *fonctions totales de Helmholtz*.

égalités qui deviennent, dans le cas d'un système en repos,

$$(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z) = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\partial(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})}{\partial t}. \tag{114}$$

21. *Propriétés du potentiel vecteur magnétique.* — La comparaison des égalités (2) et (110) montre que Φ est le potentiel magnétique d'une distribution, dont l'intensité d'aimantation aurait pour composantes o, $\mathcal{C}$, $-\mathcal{B}$; les deux autres fonctions Ψ, Ω donnant lieu à des remarques analogues. D'après (6), les densités cubique et superficielle de la distribution fictive équivalente relative à Φ sont respectivement

$$-\left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z}\right), \qquad -(\mathcal{C}_1 \beta_1 - \mathcal{B}_1 \gamma_1 + \mathcal{C}_2 \beta_2 - \mathcal{B}_2 \gamma_2);$$

il en résulte que les fonctions Φ, Ψ, Ω sont continues dans tout l'espace, qu'on a, d'après (7),

$$\left\{\begin{aligned} \Delta\Phi &= 4\pi\left(\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z}\right), \\ \Delta\Psi &= 4\pi\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x}\right), \\ \Delta\Omega &= 4\pi\left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial y}\right) \end{aligned}\right. \tag{115}$$

en tout point d'un corps continu et, d'après (8),

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial n_2} &= 4\pi(\mathcal{C}_1 \beta_1 - \mathcal{B}_1 \gamma_1 + \mathcal{C}_2 \beta_2 - \mathcal{B}_2 \gamma_2), \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial n_2} &= 4\pi(\mathcal{A}_1 \gamma_1 - \mathcal{C}_1 \alpha_1 + \mathcal{A}_2 \gamma_2 - \mathcal{C}_2 \alpha_2), \\ \frac{\partial \Omega}{\partial n_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial n_2} &= 4\pi(\mathcal{B}_1 \alpha_1 - \mathcal{A}_1 \beta_1 + \mathcal{B}_2 \alpha_2 - \mathcal{A}_2 \beta_2) \end{aligned}\right. \tag{116}$$

en tout point d'une surface séparative des deux milieux 1 et 2.

Considérons, d'autre part, les fonctions de x, y, z, t définies par les formules

$$(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}) = \int \frac{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})}{r} d\varpi, \tag{117}$$

où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont des fonctions de t et des variables d'inté-

gration ξ, η, ζ; les égalités (110) peuvent s'écrire

$$(118)\quad \begin{cases} \Phi = -\dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z}, \\ \Psi = -\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} + \dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x}, \\ \Omega = -\dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y}. \end{cases}$$

On en déduit tout d'abord

$$(119)\quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0.$$

On a, d'autre part,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \Delta \mathfrak{L} - \frac{\partial}{\partial x}\left|\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}\right|,$$

et comme

$$\Delta \mathfrak{L} = -4\pi \mathfrak{A}, \qquad \left|\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}\right| = -\int \left| \mathfrak{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right| d\varpi = -\mathfrak{V},$$

$\mathfrak{V}$ étant, d'après (2), le potentiel magnétique du système au point (x, y, z), il vient la première des égalités

$$(120)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial y} - \dfrac{\partial \Psi}{\partial z} = \dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} - 4\pi \mathfrak{A}, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} - \dfrac{\partial \Omega}{\partial x} = \dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} - 4\pi \mathfrak{B}, \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} - 4\pi \mathfrak{C}. \end{cases}$$

22. *Champ électrique; lois de la polarisation diélectrique.* — Revenons aux égalités (72), où $(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z)$ désigne la force électromotrice d'induction, tant électrodynamique qu'électromagnétique, donnée par (113); elles s'écrivent

$$(121)\quad (E_x, E_y, E_z) = (X, Y, Z) - \frac{\partial \Theta}{\partial (x, y, z)} + (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z),$$

le vecteur

$$(122)\quad (X, Y, Z) = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial (x, y, z)} + (\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z)$$

étant, par définition, le *champ électrique* au point (x, y, z); on voit qu'il est la résultante du champ électrostatique $-\varepsilon \frac{\partial V}{\partial(x, y, z)}$, du *champ électrodynamique* égal à la force électromotrice d'induction électrodynamique et du *champ électromagnétique* égal à la force électromotrice d'induction électromagnétique. Dans le cas d'un système en repos, les formules (122) deviennent, d'après (114),

$$(123) \qquad (X, Y, Z) = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial(x, y, z)} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\partial(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})}{\partial t};$$

d'après (112), le champ électrodynamique est alors

$$-\frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{\partial(F, G, H)}{\partial t}$$

et le champ électromagnétique

$$-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'} \frac{\partial(\Phi, \Psi, \Omega)}{\partial t}.$$

Lorsque le champ électrique se réduit au champ électrostatique, nous avons démontré (n° 8) que l'intensité de polarisation (A, B, C) en un point d'un diélectrique parfaitement doux est liée à ce champ par les formules

$$(44) \qquad (A, B, C) = k(X, Y, Z).$$

On admet que ces formules subsistent dans le cas général où le champ électrique est donné par (122); elles constituent alors les lois générales de la polarisation diélectrique.

CHAPITRE III.

L'ÉNERGIE INTERNE ET LES LOIS DE L'AIMANTATION.

23. *Calcul d'une dérivée.* — Proposons-nous de calculer la dérivée de la fonction

$$(124) \qquad \Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{4} \int (\mathrm{F} f + \mathrm{G} g + \mathrm{H} h)\, d\varpi$$

relative à un système en repos, et qui, d'après (99), ne dépend que de t par l'intermédiaire des fonctions f, g, h. On peut écrire

$$\int \mathrm{F} f\, d\varpi = \int\int \left[\frac{1+\lambda}{2r} f' + \frac{1-\lambda}{2r} \left(\frac{\xi'-\xi}{r} f' + \frac{\eta'-\eta}{r} g' + \frac{\zeta'-\zeta}{r} h' \right) \frac{\xi'-\xi}{r} \right] f\, d\varpi\, d\varpi',$$

l'intégrale sextuple étant étendue deux fois au système entier, et les fonctions f, g, h étant relatives à un point (ξ, η, ζ) de $d\varpi$, les fonctions f', g', h' à un point ξ', η', ζ' de $d\varpi'$; d'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \mathrm{F} f\, d\varpi = \int\int \Bigg\{ & \left[\frac{1+\lambda}{2r} f' + \frac{1-\lambda}{2r} \left(\frac{\xi'-\xi}{r} f' + \frac{\eta'-\eta}{r} g' + \frac{\zeta'-\zeta}{r} h' \right) \frac{\xi'-\xi}{r} \right] \frac{\partial f}{\partial t} \\ & + \left[\frac{1+\lambda}{2r} \frac{\partial f'}{\partial t} + \frac{1-\lambda}{2r} \left(\frac{\xi'-\xi}{r} \frac{\partial f'}{\partial t} + \frac{\eta'-\eta}{r} \frac{\partial g'}{\partial t} + \frac{\zeta'-\zeta}{r} \frac{\partial h'}{\partial t} \right) \frac{\xi'-\xi}{r} \right] f \Bigg\} d\varpi\, d\varpi'. \end{aligned}$$

changée de signe de $d\Pi$, calculée en laissant I et I' constants.

Si l'on suppose I' uniforme, I' est constant tout le long de C'; de sorte que la force électromotrice totale $\mathcal{E}$ induite dans C par C' est, d'après (75) et (74),

$$\mathcal{E} = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{d}{dt}\,I'\int\int\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial n\,\partial n'}\,dS\,dS', \tag{77}$$

et, si les deux courants sont uniformes, le potentiel électrodynamique des deux circuits est, d'après (76) et (74),

$$\Pi = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,II'\int\int\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial n\,\partial n'}\,dS\,dS'. \tag{78}$$

La comparaison de (14) et (78) montre alors que le potentiel mutuel de deux feuillets magnétiques coïncide avec l'énergie électrodynamique de deux circuits parcourus par des courants uniformes, si les feuillets ont même contour et même face positive que les circuits et si l'on a

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,I = \sqrt{\varepsilon'}\,\mathfrak{P}, \qquad \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,I' = \sqrt{\varepsilon'}\,\mathfrak{P}', \tag{79}$$

moyennant quoi, (15) s'écrit

$$\Phi = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\,I'\int\int\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial n\,\partial n'}\,dS\,dS',$$

de sorte que (77) devient

$$\mathcal{E} = -\frac{\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\varepsilon'}}\frac{d\Phi}{dt}, \tag{80}$$

valeur qu'on démontre égale à la force électromotrice que le feuillet $\mathfrak{P}'$ induirait dans C. Un feuillet magnétique est donc équivalent à un courant uniforme I de même contour, dont la face positive coïncide avec celle du feuillet et dont la puissance $\mathfrak{P}$ est définie par la première (79).

CHAPITRE II.

L'INDUCTION ÉLECTRODYNAMIQUE ET ÉLECTROMAGNÉTIQUE.

---

15. *Composantes de la force électromotrice élémentaire d'induction électrodynamique en un point, suivant les axes principaux de dilatation en ce point.* — D'après (75), la force électromotrice $e\,ds'$ induite dans l'élément ds' par l'élément de courant (I, ds) est

$$(81)\quad e\,ds'\,dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\delta\left[\left(\frac{1+\lambda}{2r}\cos\omega + \frac{1-\lambda}{2r}\cos\theta\cos\theta'\right)\mathrm{I}\,ds\,ds'\right],$$

δ étant la variation éprouvée par la quantité entre crochets pendant le temps dt.

Cela posé, soit $e_x\,dx$ la force électromotrice induite dans l'élément dx parallèle à Ox et d'origine M(x, y, z), par le courant total traversant une particule $d\varpi$ du système; on admet que les composantes de la force électromotrice d'induction électrodynamique en M ont pour expressions

$$(82)\qquad (\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z) = \int (e_x, e_y, e_z),$$

e_y, e_z ayant des significations analogues à e_x et les intégrations s'étendant au système entier.

Calculons tout d'abord e_x, e_y, e_z, en prenant comme axes de coordonnées les axes principaux de dilatation Mxyz en M.

Pour pouvoir appliquer (81), prenons $d\varpi = d\mathrm{S}\,ds$, dS étant la section d'un élément de conducteur linéaire $\mathrm{PP}_1 = ds$ dirigé suivant la densité C du courant total en P de composantes f, g, h; l'intensité I du courant qui parcourt ds est ainsi $\mathrm{I} = \mathrm{C}\,d\mathrm{S}$, d'où $\mathrm{I}\,ds = \mathrm{C}\,d\varpi$. Soient, d'autre part, α, β, γ les cosinus directeurs de ds, l, m, n ceux de MP; on a, puisque dx joue le rôle de l'élément ds',

$$\cos\omega = \alpha,\qquad \cos\theta = l\alpha + m\beta + n\gamma,\qquad \cos\theta' = l,$$

de sorte que (81) donne, en remarquant que

$$(f, g, h) = C(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$e_x\, dx\, dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\delta\left\{\left[\frac{1+\lambda}{2r}f + \frac{1-\lambda}{2r}l(lf + mg + nh)\right] d\varpi\, dx\right\},$$

ou encore

$$(83)\quad e_x\, dt = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\delta\left\{\left[\frac{1+\lambda}{2r}f + \frac{1-\lambda}{2r}l(lf + mg + nh)\right] d\varpi\right\}$$
$$-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\frac{1+\lambda}{2r}f + \frac{1-\lambda}{2r}l(lf + mg + nh)\right]\partial_1\, d\varpi,$$

$\partial_1 = \frac{\delta\, dx}{dx}$ désignant la dilatation principale en M suivant Mx éprouvée par l'élément $d\varpi$ pendant le temps dt.

Si donc on pose

$$(84)\quad (\mathfrak{f}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}) = \frac{1+\lambda}{2r}(f, g, h)$$
$$+\frac{1-\lambda}{2r}(l, m, n)(lf + mg + nh),$$

l'égalité (83) devient la première des suivantes :

$$(85)\quad \begin{cases} e_x\, dt = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}[\delta(\mathfrak{f}\, d\varpi) + \mathfrak{f}\,\partial_1\, d\varpi], \\ e_y\, dt = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}[\delta(\mathfrak{G}\, d\varpi) + \mathfrak{G}\,\partial_2\, d\varpi], \\ e_z\, dt = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}[\delta(\mathfrak{H}\, d\varpi) + \mathfrak{H}\,\partial_3\, d\varpi], \end{cases}$$

∂_2, ∂_3 désignant les deux autres dilatations principales au point M.

16. *Composantes de la force électromotrice élémentaire d'induction électrodynamique suivant des axes quelconques.* — Soient, par rapport à un nouveau système d'axes quelconques $O_1x_1y_1z_1$, α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'' les cosinus directeurs des anciens axes Mx, My, Mz; x, y, z; ξ, η, ζ les coordonnées de M et de P, de sorte que

$$r^2 = |(\xi - x)^2|;$$

e_{x_1}, e_{y_1}, e_{z_1}; f_1, g_1, h_1; $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{H}_1$ les nouvelles composantes

des vecteurs (e_x, e_y, e_z), (f, g, h), $(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H})$. On a

$$(86)\quad (e_{x_1}, e_{y_1}, e_{z_1}) = (\alpha, \beta, \gamma)\, e_x + (\alpha', \beta', \gamma')\, e_y + (\alpha'', \beta'', \gamma'')\, e_z,$$

$$(87)\quad (f, g, h) = (\alpha, \alpha', \alpha'')\, f_1 + (\beta, \beta', \beta'')\, g_1 + (\gamma, \gamma', \gamma'')\, h_1,$$

$$(87')\quad (f_1, g_1, h_1) = (\alpha, \beta, \gamma)\, f + (\alpha', \beta', \gamma')\, g + (\alpha'', \beta'', \gamma'')\, h,$$

$$(88)\quad (\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}) = (\alpha, \alpha', \alpha'')\, \mathfrak{F}_1 + (\beta, \beta', \beta'')\, \mathfrak{G}_1 + (\gamma, \gamma', \gamma'')\, \mathfrak{H}_1,$$

$$(88')\quad (\mathfrak{F}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}_1) = (\alpha, \beta, \gamma)\, \mathfrak{F} + (\alpha', \beta', \gamma')\, \mathfrak{G} + (\alpha'', \beta'', \gamma'')\, \mathfrak{H}.$$

On en déduit, d'après (84) et (87'),

$$(89)\quad \mathfrak{F}_1 = \frac{1+\lambda}{2r} f_1 + \frac{1-\lambda}{2r} (l\alpha + m\alpha' + n\alpha'')(lf + mg + nh).$$

Or, on a

$$(90)\quad l(\alpha, \beta, \gamma) + m(\alpha', \beta', \gamma') + n(\alpha'', \beta'', \gamma'') = \frac{(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)}{r}$$

et, d'après (87) et (90),

$$lf + mg + nh = \frac{\xi - x}{r} f_1 + \frac{\eta - y}{r} g_1 + \frac{\zeta - z}{r} h_1,$$

de sorte que (89) devient la première des égalités

$$(91)\quad (\mathfrak{F}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{H}_1) = \frac{1+\lambda}{2r} (f_1, g_1, h_1) + \frac{1-\lambda}{2r} \left(\frac{\xi - x}{r} f_1 + \frac{\eta - y}{r} g_1 + \frac{\zeta - z}{r} h_1 \right) \times \frac{(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)}{r}.$$

On a d'autre part, d'après (85) et (86),

$$(92)\quad -\frac{2}{\mathfrak{R}^2} e_{x_1}\, dt = \alpha\, \delta(\mathfrak{F}\, d\varpi) + \alpha'\, \delta(\mathfrak{G}\, d\varpi) + \alpha''\, \delta(\mathfrak{H}\, d\varpi) + (\alpha \mathfrak{F} \partial_1 + \alpha' \mathfrak{G} \partial_2 + \alpha'' \mathfrak{H} \partial_3)\, d\varpi$$

et, d'après (88'),

$$\delta(\mathfrak{F}_1\, d\varpi) = \alpha\, \delta(\mathfrak{F}\, d\varpi) + \alpha'\, \delta(\mathfrak{G}\, d\varpi) + \alpha''\, \delta(\mathfrak{H}\, d\varpi) + (\mathfrak{F}\, \delta\alpha + \mathfrak{G}\, \delta\alpha' + \mathfrak{H}\, \delta\alpha'')\, d\varpi,$$

de sorte que (92) devient

$$(93)\quad -\frac{2}{\mathfrak{R}^2} e_{x_1}\, dt = \delta(\mathfrak{F}_1\, d\varpi) + [\mathfrak{F}(\alpha \partial_1 - \delta\alpha) + \mathfrak{G}(\alpha' \partial_2 - \delta\alpha') + \mathfrak{H}(\alpha'' \partial_3 - \delta\alpha'')]\, d\varpi.$$

Mais, $\omega, \omega', \omega''$ désignant les composantes suivant $O_1x_1y_1z_1$ de la rotation moyenne du trièdre $Mxyz$ pendant le temps dt, on a

$$\delta(\alpha, \alpha', \alpha'') = (\gamma, \gamma', \gamma'')\omega' - (\beta, \beta', \beta'')\omega'',$$

d'où, d'après (88'),

$$\mathfrak{f}\,\delta\alpha + \mathfrak{G}\,\delta\alpha' + \mathfrak{H}\,\delta\alpha'' = \mathfrak{H}_1\omega' - \mathfrak{G}_1\omega''.$$

L'égalité (93) devient ainsi, d'après (88),

$$(94)\quad -\frac{2}{\mathfrak{R}^2}e_{\varepsilon_1}dt = \delta(\mathfrak{f}_1 d\varpi) + [\ \mathfrak{f}_1(\alpha^2\partial_1 + \alpha'^2\partial_2 + \alpha''^2\partial_3) + \mathfrak{G}_1(\alpha\beta\partial_1 + \alpha'\beta'\partial_2 + \alpha''\beta''\partial_3) + \mathfrak{H}_1(\alpha\gamma\partial_1 + \alpha'\gamma'\partial_2 + \alpha''\gamma''\partial_3) - \mathfrak{H}_1\omega' + \mathfrak{G}_1\omega''\,]\,d\varpi.$$

Or, la Cinématique des milieux continus nous enseigne que les dilatations principales en M sont liées aux composantes δx, δy, δz du déplacement de ce point suivant les axes $O_1x_1y_1z_1$ par les relations

$$(95)\quad \begin{cases} \alpha^2\partial_1 + \alpha'^2\partial_2 + \alpha''^2\partial_3 = \dfrac{\partial\,\delta x}{\partial x}, \\ \alpha\beta\partial_1 + \alpha'\beta'\partial_2 + \alpha''\beta''\partial_3 = \dfrac{\partial\,\delta y}{\partial x} - \omega'', \\ \alpha\gamma\partial_1 + \alpha'\gamma'\partial_2 + \alpha''\gamma''\partial_3 = \dfrac{\partial\,\delta z}{\partial x} + \omega' \end{cases}$$ (1);

(1) Les formules (95) peuvent être établies comme il suit : soient a, b, c les composantes du déplacement subi par M pendant le temps dt, suivant les axes principaux de dilatation en ce point, désignés par $Mxyz$ au n° 15 et que nous désignerons ici par $M\xi\eta\zeta$; on a

$$(A)\quad \begin{cases} \partial_1 = \dfrac{\partial a}{\partial\xi}, \quad \partial_2 = \dfrac{\partial b}{\partial\eta}, \quad \partial_3 = \dfrac{\partial c}{\partial\zeta}; \\ \dfrac{\partial c}{\partial\eta} + \dfrac{\partial b}{\partial\zeta} = 0, \quad \dfrac{\partial a}{\partial\zeta} + \dfrac{\partial c}{\partial\xi} = 0, \quad \dfrac{\partial b}{\partial\xi} + \dfrac{\partial a}{\partial\eta} = 0. \end{cases}$$

Les composantes Ω, Ω', Ω'' de la rotation moyenne en M suivant les mêmes axes sont alors

$$(B)\quad \begin{cases} \Omega = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial c}{\partial\eta} - \dfrac{\partial b}{\partial\zeta}\right) = \dfrac{\partial c}{\partial\eta} = -\dfrac{\partial b}{\partial\zeta}, \\ \Omega' = \dfrac{\partial a}{\partial\zeta} = -\dfrac{\partial c}{\partial\xi}, \quad \Omega'' = \dfrac{\partial b}{\partial\xi} = -\dfrac{\partial a}{\partial\eta}. \end{cases}$$

D'autre part, les composantes $\delta(x, y, z)$ du déplacement de M

l'égalité (94) devient ainsi la première des suivantes :

$$(96)\quad \begin{cases} e_x\,dt = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\delta(\mathfrak{F}\,d\varpi) + \left(\mathfrak{F}\dfrac{d\,\delta x}{dx} + \mathfrak{G}\dfrac{d\,\delta y}{dx} + \mathfrak{H}\dfrac{d\,\delta z}{dx}\right)d\varpi\right], \\ e_y\,dt = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\delta(\mathfrak{G}\,d\varpi) + \left(\mathfrak{F}\dfrac{d\,\delta x}{dy} + \mathfrak{G}\dfrac{d\,\delta y}{dy} + \mathfrak{H}\dfrac{d\,\delta z}{dy}\right)d\varpi\right], \\ e_z\,dt = -\dfrac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\delta(\mathfrak{H}\,d\varpi) + \left(\mathfrak{F}\dfrac{d\,\delta x}{dz} + \mathfrak{G}\dfrac{d\,\delta y}{dz} + \mathfrak{H}\dfrac{d\,\delta z}{dz}\right)d\varpi\right], \end{cases}$$

où nous avons effacé l'indice 1 désormais inutile au bas des nouveaux axes $Oxyz$ et de toutes les quantités qui s'y rapportent. D'après (91), les fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ figurant dans (96) sont donc définies par les formules

$$(97)\quad \begin{cases} \mathfrak{F} = \dfrac{1+\lambda}{2r}f + \dfrac{1-\lambda}{2r}\left(\dfrac{\xi-x}{r}f + \dfrac{\eta-y}{r}g + \dfrac{\zeta-z}{r}h\right)\dfrac{\xi-x}{r}, \\ \mathfrak{G} = \dfrac{1+\lambda}{2r}g + \dfrac{1-\lambda}{2r}\left(\dfrac{\xi-x}{r}f + \dfrac{\eta-y}{r}g + \dfrac{\zeta-z}{r}h\right)\dfrac{\eta-y}{r}, \\ \mathfrak{H} = \dfrac{1+\lambda}{2r}h + \dfrac{1-\lambda}{2r}\left(\dfrac{\xi-x}{r}f + \dfrac{\eta-y}{r}g + \dfrac{\zeta-z}{r}h\right)\dfrac{\zeta-z}{r}, \end{cases}$$

où f, g, h sont des fonctions de t et des coordonnées ξ, η, ζ de l'élément $d\varpi$.

---

suivant les axes quelconques $O_1x_1y_1z_1$ sont

$$\delta(x, y, z) = (\alpha, \beta, \gamma)a + (\alpha', \beta', \gamma')b + (\alpha'', \beta'', \gamma'')c$$

et, comme

$$\frac{d}{dx} = \alpha\frac{d}{d\xi} + \alpha'\frac{d}{d\eta} + \alpha''\frac{d}{d\zeta},$$

on a, d'après (A) et (B) et en tenant compte des relations entre les cosinus,

$$(\mathrm{C})\quad \begin{cases} \dfrac{d\,\delta x}{dx} = \alpha^2\,\partial_1 + \alpha'^2\,\partial_2 + \alpha''^2\,\partial_3, \\ \dfrac{d\,\delta y}{dx} = \alpha\beta\partial_1 + \alpha'\beta'\partial_2 + \alpha''\beta''\partial_3 + \gamma\Omega + \gamma'\Omega' + \gamma''\Omega'', \\ \dfrac{d\,\delta z}{dx} = \alpha\gamma\partial_1 + \alpha'\gamma'\partial_2 + \alpha''\gamma''\partial_3 - \beta\Omega - \beta'\Omega' - \beta''\Omega''. \end{cases}$$

Mais comme

$$(\omega, \omega', \omega'') = (\alpha, \beta, \gamma)\Omega + (\alpha', \beta', \gamma')\Omega' + (\alpha'', \beta'', \gamma'')\Omega'',$$

les formules (C) deviennent immédiatement celles (95) du texte.

17. *Composantes de la force électromotrice d'induction électrodynamique; potentiel vecteur électrique.* — D'après (82), (96) et (97), les composantes $(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z)$ de la force électromotrice d'induction électrodynamique au point $M(x, y, z)$ sont données par les formules

$$(98)\quad \left\{\begin{aligned} \mathcal{E}_x\, dt &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta F + F\frac{\partial\, \delta x}{\partial x} + G\frac{\partial\, \delta y}{\partial x} + H\frac{\partial\, \delta z}{\partial x}\right), \\ \mathcal{E}_y\, dt &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta G + F\frac{\partial\, \delta x}{\partial y} + G\frac{\partial\, \delta y}{\partial y} + H\frac{\partial\, \delta z}{\partial y}\right), \\ \mathcal{E}_z\, dt &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\delta H + F\frac{\partial\, \delta x}{\partial z} + G\frac{\partial\, \delta y}{\partial z} + H\frac{\partial\, \delta z}{\partial z}\right), \end{aligned}\right.$$

où F, G, H sont les fonctions de x, y, z, t définies par les formules

$$(99)\quad \left\{\begin{aligned} F &= \int\left[\frac{1+\lambda}{2r}f + \frac{1-\lambda}{2r}\left(\frac{\xi-x}{r}f + \frac{\eta-y}{r}g + \frac{\zeta-z}{r}h\right)\frac{\xi-x}{r}\right]d\varpi, \\ G &= \int\left[\frac{1+\lambda}{2r}g + \frac{1-\lambda}{2r}\left(\frac{\xi-x}{r}f + \frac{\eta-y}{r}g + \frac{\zeta-z}{r}h\right)\frac{\eta-y}{r}\right]d\varpi, \\ H &= \int\left[\frac{1+\lambda}{2r}h + \frac{1-\lambda}{2r}\left(\frac{\xi-x}{r}f + \frac{\eta-y}{r}g + \frac{\zeta-z}{r}h\right)\frac{\zeta-z}{r}\right]d\varpi, \end{aligned}\right.$$

f, g, h étant des fonctions de t et des variables d'intégration ξ, η, ζ; ces fonctions F, G, H sont les composantes d'un vecteur d'origine M appelé *potentiel vecteur électrique* en ce point.

Comme d'ailleurs

$$\begin{aligned} \delta F &= \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z + \frac{\partial F}{\partial t}dt \\ &= \left(a\frac{\partial F}{\partial x} + b\frac{\partial F}{\partial y} + c\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial t}\right)dt, \end{aligned}$$

a, b, c étant les composantes de la vitesse du point M par rapport aux axes $Oxyz$ considérés, les formules (98) s'écrivent

$$\mathcal{E}_x = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + a\frac{\partial F}{\partial x} + b\frac{\partial F}{\partial y} + c\frac{\partial F}{\partial z} + F\frac{\partial a}{\partial x} + G\frac{\partial b}{\partial x} + H\frac{\partial c}{\partial x}\right),$$

. . . .

ou encore

$$
(100)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathcal{E}_x &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(aF + bG + cH)\right] + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(b\mathfrak{R} - c\mathfrak{Q}),\\
\mathcal{E}_y &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(aF + bG + cH)\right] + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(c\mathfrak{P} - a\mathfrak{R}),\\
\mathcal{E}_z &= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(aF + bG + cH)\right] + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(a\mathfrak{Q} - b\mathfrak{P}),
\end{aligned}
\right.
$$

en posant

$$
(101)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{P} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right),\\
\mathfrak{Q} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right),\\
\mathfrak{R} &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Remarquons que les expressions (100) sont valables pour un système animé d'un mouvement quelconque, sauf que le courant total figurant dans (99) n'est plus donné par les formules (58), qui supposent essentiellement le système en repos.

18. *La fonction* $\mho(x, y, z, t)$. — La fonction

$$\mho(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t}\,\frac{d\varpi}{r}$$

est continue dans tout l'espace ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres; on en déduit

$$(102)\qquad \Delta\mho = 2\frac{\partial V}{\partial t},$$

$$\frac{\partial\mho}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial V}{\partial t}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,d\varpi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V}{\partial t}\,\Delta\frac{\partial r}{\partial x}\,d\varpi,$$

car $\Delta r = \frac{2}{r}$. En appliquant la formule de Green et en remarquant que $\frac{\partial r}{\partial n_1} + \frac{\partial r}{\partial n_2}$ est nul sur chaque surface séparative S, il vient

$$\frac{\partial\mho}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial r}{\partial x}\,\Delta\frac{\partial V}{\partial t}\,d\varpi - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial r}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2}\right)dS.$$

Or on a, d'après (61), (32) et (29),

$$\Delta\frac{\partial V}{\partial t} = -4\pi\frac{\partial(e+E)}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial n_1}+\frac{\partial V}{\partial n_2}\right) = -4\pi\frac{\partial(\sigma+\Sigma)}{\partial t},$$

d'où

$$\frac{\partial \mho}{\partial x} = \int\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial(e+E)}{\partial t}\,d\varpi + \int\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial(\sigma+\Sigma)}{\partial t}\,dS.$$

Cette égalité est entièrement générale; supposons maintenant le système en repos par rapport aux axes $Oxyz$ auxquels il est rapporté : elle devient, d'après les équations de continuité (59) et (60),

$$(103) \qquad \frac{\partial \mho}{\partial x} = -\int\frac{\partial r}{\partial x}\left|\frac{\partial f}{\partial \xi}\right|d\varpi - \int\frac{\partial r}{\partial x}|f_1\alpha_1+f_2\alpha_2|\,dS$$

et, en intégrant par parties,

$$\frac{\partial \mho}{\partial x} = \int\left(f\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial\xi}+g\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial\eta}+h\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial\zeta}\right)d\varpi.$$

Or, il résulte de l'expression $r^2 = |(x-\xi)^2|$ qu'on a

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial\xi} = -\frac{1}{r}+\frac{(\xi-x)^2}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial\eta} = \frac{(\xi-x)(\eta-y)}{r^3},$$
$$\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial\zeta} = \frac{(\xi-x)(\zeta-z)}{r^3},$$

d'où

$$\frac{\partial \mho}{\partial x} = \int\left[-f+\left(\frac{\xi-x}{r}f+\frac{\eta-y}{r}g+\frac{\zeta-z}{r}h\right)\frac{\xi-x}{r}\right]\frac{d\varpi}{r}.$$

Cette expression, comparée à la première (99), donne la première des égalités

$$(104) \qquad (F, G, H) = \int\frac{(f, g, h)}{r}\,d\varpi + \frac{1-\lambda}{2}\,\frac{\partial \mho}{\partial(x, y, z)},$$

où f, g, h sont des fonctions de t et des variables d'intégration ξ, η, ζ.

19. *Propriétés du potentiel vecteur électrique.* — Les égalités (104) montrent que les fonctions F, G, H et leurs dérivées partielles du premier ordre sont continues dans tout

l'espace; on en déduit

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| = \int \left| f \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right| d\varpi + \frac{1-\lambda}{2}\Delta \mho.$$

Mais on a, en intégrant par parties,

$$\int \left| f \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right| d\varpi = -\int \left| f \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\right| d\varpi$$

$$= \int' \left|\frac{\partial f}{\partial \xi}\right| \frac{d\varpi}{r} + \int |f_1\alpha_1 + f_2\alpha_2| \frac{dS}{r} = -\frac{\partial V}{\partial t}$$

d'après (61′); d'où, d'après (102),

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = -\lambda \frac{\partial V}{\partial t}. \tag{105}$$

D'autre part, la première (104) donne

$$\Delta F = -4\pi f + \frac{1-\lambda}{2}\frac{\partial \Delta \mho}{\partial x},$$

d'où, d'après (102), la première des formules

$$\Delta(F, G, H) = -4\pi(f, g, h) + (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial(x, y, z)\,\partial t}. \tag{106}$$

Enfin, les formules (101) s'écrivent, d'après (104),

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{F}(x, y, z, t) &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\left(h\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - g\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) d\varpi,\\
\mathfrak{G}(x, y, z, t) &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\left(f\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - h\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right) d\varpi,\\
\mathfrak{H}(x, y, z, t) &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\left(g\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - f\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right) d\varpi,
\end{aligned}\right. \tag{107}$$

où f, g, h sont des fonctions de ξ, η, ζ, t.

20. ***Potentiel vecteur magnétique et potentiel vecteur total.*** — Les conditions d'équivalence des feuillets magnétiques et des courants uniformes (n° 14) conduisent à énoncer le postulat suivant :

Tout élément magnétique engendre la même force

de $\mathfrak{J}$, on voit que $\mathfrak{J}\gamma = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{J}\beta = \mathfrak{B}$; si donc on pose

$$
(110) \quad
\begin{cases}
\Phi(x, y, z, t) = \displaystyle\int \left(\mathfrak{C} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - \mathfrak{B} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\varpi, \\[2ex]
\Psi(x, y, z, t) = \displaystyle\int \left(\mathfrak{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} - \mathfrak{C} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right) d\varpi, \\[2ex]
\Omega(x, y, z, t) = \displaystyle\int \left(\mathfrak{B} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} - \mathfrak{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \right) d\varpi,
\end{cases}
$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ étant des fonctions de ξ, η, ζ, t et les intégrations s'étendant au système entier, les fonctions F, G, H dues à l'aimantation du système seront respectivement

$$
(111) \qquad \frac{\sqrt{\epsilon'}}{\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}}(\Phi, \Psi, \Omega).
$$

Le vecteur de composantes Φ, Ψ, Ω est le *potentiel vecteur magnétique* au point (x, y, z).

Les composantes de la force électromotrice d'induction électromagnétique sont alors données par (98) ou (100) et (101), où l'on a remplacé F, G, H par les fonctions (111).

On appelle *potentiel vecteur total* au point (x, y, z) le vecteur ayant pour composantes

$$
(112) \qquad (\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}) = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}(\mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H}) + \sqrt{\epsilon'}(\Phi, \Psi, \Omega) \quad (^1);
$$

les composantes $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ de la force électromotrice totale d'induction, tant électrodynamique qu'électromagnétique, sont ainsi, d'après (98),

$$
(113) \quad
\begin{cases}
\mathcal{E}_x\, dt = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\delta\mathcal{F} + \mathcal{F}\dfrac{\partial\, \delta x}{\partial x} + \mathcal{G}\dfrac{\partial\, \delta y}{\partial x} + \mathcal{H}\dfrac{\partial\, \delta z}{\partial x}\right), \\[2ex]
\mathcal{E}_y\, dt = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\delta\mathcal{G} + \mathcal{F}\dfrac{\partial\, \delta x}{\partial y} + \mathcal{G}\dfrac{\partial\, \delta y}{\partial y} + \mathcal{H}\dfrac{\partial\, \delta z}{\partial y}\right), \\[2ex]
\mathcal{E}_z\, dt = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\delta\mathcal{H} + \mathcal{F}\dfrac{\partial\, \delta x}{\partial z} + \mathcal{G}\dfrac{\partial\, \delta y}{\partial z} + \mathcal{H}\dfrac{\partial\, \delta z}{\partial z}\right),
\end{cases}
$$

(1) Duhem appelle les fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, les *fonctions totales de Helmholtz*.

égalités qui deviennent, dans le cas d'un système en repos,

$$(114)\qquad (\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z) = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})}{\partial t}.$$

21. *Propriétés du potentiel vecteur magnétique.* — La comparaison des égalités (2) et (110) montre que Φ est le potentiel magnétique d'une distribution, dont l'intensité d'aimantation aurait pour composantes o, $\mathcal{C}$, $-\mathcal{B}$; les deux autres fonctions Ψ, Ω donnant lieu à des remarques analogues. D'après (6), les densités cubique et superficielle de la distribution fictive équivalente relative à Φ sont respectivement

$$-\left(\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial y} - \frac{\partial\mathcal{B}}{\partial z}\right), \qquad -(\mathcal{C}_1\beta_1 - \mathcal{B}_1\gamma_1 + \mathcal{C}_2\beta_2 - \mathcal{B}_2\gamma_2);$$

il en résulte que les fonctions Φ, Ψ, Ω sont continues dans tout l'espace, qu'on a, d'après (7),

$$(115)\qquad \begin{cases} \Delta\Phi = 4\pi\left(\dfrac{\partial\mathcal{C}}{\partial y} - \dfrac{\partial\mathcal{B}}{\partial z}\right), \\ \Delta\Psi = 4\pi\left(\dfrac{\partial\mathcal{A}}{\partial z} - \dfrac{\partial\mathcal{C}}{\partial x}\right), \\ \Delta\Omega = 4\pi\left(\dfrac{\partial\mathcal{B}}{\partial x} - \dfrac{\partial\mathcal{A}}{\partial y}\right) \end{cases}$$

en tout point d'un corps continu et, d'après (8),

$$(116)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial n_1} + \dfrac{\partial\Phi}{\partial n_2} = 4\pi(\mathcal{C}_1\beta_1 - \mathcal{B}_1\gamma_1 + \mathcal{C}_2\beta_2 - \mathcal{B}_2\gamma_2), \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial n_1} + \dfrac{\partial\Psi}{\partial n_2} = 4\pi(\mathcal{A}_1\gamma_1 - \mathcal{C}_1\alpha_1 + \mathcal{A}_2\gamma_2 - \mathcal{C}_2\alpha_2), \\ \dfrac{\partial\Omega}{\partial n_1} + \dfrac{\partial\Omega}{\partial n_2} = 4\pi(\mathcal{B}_1\alpha_1 - \mathcal{A}_1\beta_1 + \mathcal{B}_2\alpha_2 - \mathcal{A}_2\beta_2) \end{cases}$$

en tout point d'une surface séparative des deux milieux 1 et 2.

Considérons, d'autre part, les fonctions de x, y, z, t définies par les formules

$$(117)\qquad (\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \int\frac{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})}{r}\,d\varpi,$$

où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont des fonctions de t et des variables d'inté-

gration ξ, η, ζ; les égalités (110) peuvent s'écrire

$$(118)\quad \begin{cases} \Phi = -\dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z}, \\ \Psi = -\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} + \dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x}, \\ \Omega = -\dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y}. \end{cases}$$

On en déduit tout d'abord

$$(119)\quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0.$$

On a, d'autre part,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \Delta \mathfrak{L} - \frac{\partial}{\partial x}\left|\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}\right|,$$

et comme

$$\Delta \mathfrak{L} = -4\pi \mathcal{A}, \qquad \left|\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}\right| = -\int \left| \mathcal{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right| d\varpi = -\mathcal{V},$$

$\mathcal{V}$ étant, d'après (2), le potentiel magnétique du système au point (x, y, z), il vient la première des égalités

$$(120)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Omega}{\partial y} - \dfrac{\partial \Psi}{\partial z} = \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} - 4\pi \mathcal{A}, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} - \dfrac{\partial \Omega}{\partial x} = \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} - 4\pi \mathcal{B}, \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} - \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} - 4\pi \mathcal{C}. \end{cases}$$

22. *Champ électrique; lois de la polarisation diélectrique.* — Revenons aux égalités (72), où $(\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z)$ désigne la force électromotrice d'induction, tant électrodynamique qu'électromagnétique, donnée par (113); elles s'écrivent

$$(121)\quad (E_x, E_y, E_z) = (X, Y, Z) - \frac{\partial \Theta}{\partial(x, y, z)} + (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z),$$

le vecteur

$$(122)\quad (X, Y, Z) = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial(x, y, z)} + (\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z)$$

étant, par définition, le *champ électrique* au point (x, y, z) on voit qu'il est la résultante du champ électrostatique $-\varepsilon \frac{\partial V}{\partial(x, y, z)}$, du *champ électrodynamique* égal à la force électromotrice d'induction électrodynamique et du *champ électromagnétique* égal à la force électromotrice d'induction électromagnétique. Dans le cas d'un système en repos, les formules (122) deviennent, d'après (114),

$$(123) \qquad (X, Y, Z) = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial(x, y, z)} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\partial(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H})}{\partial t};$$

d'après (112), le champ électrodynamique est alors

$$-\frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{\partial(F, G, H)}{\partial t}$$

et le champ électromagnétique

$$-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'} \frac{\partial(\Phi, \Psi, \Omega)}{\partial t}.$$

Lorsque le champ électrique se réduit au champ électrostatique, nous avons démontré (n° 8) que l'intensité de polarisation (A, B, C) en un point d'un diélectrique parfaitement doux est liée à ce champ par les formules

$$(44) \qquad (A, B, C) = k(X, Y, Z).$$

On admet que ces formules subsistent dans le cas général où le champ électrique est donné par (122); elles constituent alors les lois générales de la polarisation diélectrique.

CHAPITRE III.

L'ÉNERGIE INTERNE ET LES LOIS DE L'AIMANTATION.

---

23. *Calcul d'une dérivée.* — Proposons-nous de calculer la dérivée de la fonction

$$(124) \qquad \Pi = -\frac{\mathfrak{K}^2}{4}\int (\mathrm{F}f + \mathrm{G}g + \mathrm{H}h)\, d\varpi$$

relative à un système en repos, et qui, d'après (99), ne dépend que de t par l'intermédiaire des fonctions f, g, h. On peut écrire

$$\int \mathrm{F} f\, d\varpi = \int\int \Big[\frac{1+\lambda}{2r} f' + \frac{1-\lambda}{2r}\Big(\frac{\xi'-\xi}{r} f' + \frac{\eta'-\eta}{r} g' + \frac{\zeta'-\zeta}{r} h'\Big)\frac{\xi'-\xi}{r}\Big] f\, d\varpi\, d\varpi',$$

l'intégrale sextuple étant étendue deux fois au système entier, et les fonctions f, g, h étant relatives à un point (ξ, η, ζ) de $d\varpi$, les fonctions f', g', h' à un point ξ', η', ζ' de $d\varpi'$; d'où

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int \mathrm{F} f\, d\varpi = \int\int \Big\{ & \Big[\frac{1+\lambda}{2r} f' + \frac{1-\lambda}{2r}\Big(\frac{\xi'-\xi}{r} f' + \frac{\eta'-\eta}{r} g' + \frac{\zeta'-\zeta}{r} h'\Big)\frac{\xi'-\xi}{r}\Big]\frac{\partial f}{\partial t} \\ & + \Big[\frac{1+\lambda}{2r}\frac{\partial f'}{\partial t} + \frac{1-\lambda}{2r}\Big(\frac{\xi'-\xi}{r}\frac{\partial f'}{\partial t} + \frac{\eta'-\eta}{r}\frac{\partial g'}{\partial t} + \frac{\zeta'-\zeta}{r}\frac{\partial h'}{\partial t}\Big)\frac{\xi'-\xi}{r}\Big] f\Big\}\, d\varpi\, d\varpi'.\end{aligned}$$

Mais on a évidemment

$$\int\int\left[\frac{1+\lambda}{2r}+\frac{1-\lambda}{2r}\left(\frac{\xi'-\xi}{r}\right)^2\right]f'\frac{\partial f}{\partial t}\,d\varpi\,d\varpi'$$

$$=\int\int\left[\frac{1+\lambda}{2r}+\frac{1-\lambda}{2r}\left(\frac{\xi'-\xi}{r}\right)^2\right]f\frac{\partial f'}{\partial t}\,d\varpi\,d\varpi',$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\int \mathrm{F}f\,d\varpi = 2\int\int\left[\frac{1+\lambda}{2r}+\frac{1-\lambda}{2r}\left(\frac{\xi'-\xi}{r}\right)^2\right]f\frac{\partial f'}{\partial t}\,d\varpi\,d\varpi'$$

$$+\int\int\frac{1-\lambda}{2r}\left[\left(g'\frac{\partial f}{\partial t}+f\frac{\partial g'}{\partial t}\right)\frac{\eta'-\eta}{r}+\left(h'\frac{\partial f}{\partial t}+f\frac{\partial h'}{\partial t}\right)\frac{\zeta'-\zeta}{r}\right]\frac{\xi'-\xi}{r}\,d\varpi\,d\varpi'$$

et deux autres égalités analogues résultant de la dérivation des deux autres parties de l'intégrale (124). En les ajoutant membre à membre et en tenant compte de six relations évidentes telles que

$$\int\int\frac{(\eta'-\eta)(\zeta'-\zeta)}{r^3}h'\frac{\partial g}{\partial t}\,d\varpi\,d\varpi'$$

$$=\int\int\frac{(\zeta'-\zeta)(\eta'-\eta)}{r^3}h\,\frac{\partial g'}{\partial t}\,d\varpi\,d\varpi',$$

il vient

$$\frac{d}{dt}\int|\mathrm{F}f|\,d\varpi$$

$$=2\int\int\left|\left[\frac{1+\lambda}{2r}\frac{\partial f'}{\partial t}+\frac{1-\lambda}{2r}\left(\frac{\xi'-\xi}{r}\frac{\partial f'}{\partial t}+\frac{\eta'-\eta}{r}\frac{\partial g'}{\partial t}+\frac{\zeta'-\zeta}{r}\frac{\partial h'}{\partial t}\right)\frac{\xi'-\xi}{r}\right]f\right|\,d\varpi\,d\varpi',$$

c'est-à-dire, d'après (99),

$$\frac{d}{dt}\int|\mathrm{F}f|\,d\varpi = 2\int\left|\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}f\right|\,d\varpi.$$

On a donc finalement, d'après (124),

$$(125)\qquad \frac{d\Pi}{dt}=-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t}f+\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial t}g+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}h\right)d\varpi.$$

24. *Énergie interne d'un système isotrope.* — La formule (53) fait connaître l'énergie interne d'un système isotrope électrisé et aimanté; lorsque le système est, en outre,

parcouru par des courants, nous pouvons l'écrire

$$(126)\quad \mathfrak{E}\,\mathrm{U} = \mathfrak{E}\,\mathrm{U}_0 + \Psi + \int\left[\mathcal{F}(\mathfrak{I}) - \mathrm{T}\frac{\partial\mathcal{F}(\mathfrak{I})}{\partial\mathrm{T}}\right]d\varpi + \mathrm{M} + \mathrm{W} + \int\left[\ f(\mathrm{J}) - \mathrm{T}\frac{\partial f(\mathrm{J})}{\partial\mathrm{T}}\ \right]d\varpi + \mathfrak{E}\,\mathrm{U}',$$

U′ étant une fonction inconnue à déterminer, qui s'annule, par suite, en même temps que les courants.

Pour déterminer U′, considérons une modification élémentaire du système, de durée dt, laissant le système en repos, sa température et son état d'aimantation invariables; dans cette modification, on a, d'après le premier principe de la Thermodynamique,

$$(127)\qquad d\mathrm{U} + d\mathrm{Q} = 0,$$

dQ étant la quantité de chaleur correspondante dégagée par le système et donnée par (73), qui se réduit ici à

$$\mathfrak{E}\,d\mathrm{Q} = dt\int\left|u\left(\mathrm{E}_x - \mathrm{T}\frac{\partial\mathrm{E}_x}{\partial\mathrm{T}} + \frac{\partial\mathrm{T}}{\partial x}\,\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)\right|d\varpi + d\int\mathrm{T}\,\frac{\partial f(\mathrm{J})}{\partial\mathrm{T}}\,d\varpi,$$

par suite de la constance de T et de $\mathfrak{I}$. On a de même, d'après (126), et en remarquant que la variation de Ψ et de la première intégrale est nulle,

$$\mathfrak{E}\,d\mathrm{U} = \mathfrak{E}\,d\mathrm{U}_0 + \frac{\partial(\mathrm{M}+\mathrm{W})}{\partial t}\,dt + d\int\left[f(\mathrm{J}) - \mathrm{T}\frac{\partial f(\mathrm{J})}{\partial\mathrm{T}}\right]d\varpi + \mathfrak{E}\,d\mathrm{U}'.$$

La relation (127) nous donne ainsi :

$$(128)\quad \mathfrak{E}\,d\mathrm{U}_0 + \frac{\partial(\mathrm{M}+\mathrm{W})}{\partial t}\,dt + d\int f(\mathrm{J})\,d\varpi + \mathfrak{E}\,d\mathrm{U}' + dt\int\left|u\left(\mathrm{E}_x - \mathrm{T}\frac{\partial\mathrm{E}_x}{\partial\mathrm{T}} + \frac{\partial\mathrm{T}}{\partial x}\,\frac{\partial\Theta}{\partial\mathrm{T}}\right)\right|d\varpi = 0.$$

Or on a, d'après (40),

$$(129)\qquad d\int f(\mathrm{J})\,d\varpi = dt\int\left|\frac{\mathrm{A}}{k}\,\frac{\partial\mathrm{A}}{\partial t}\right|d\varpi$$

et, d'après (72), (114), (112), (44), (122) et du fait de l'im-

mobilité du système et de la constance de son aimantation,

$$E_x = -\frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial x_0} + \varphi_x - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial F}{\partial t},$$

$$A = -k\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial F}{\partial t}\right).$$

En tenant compte, en outre, de (65) et (66), (128) devient

$$(130)\quad \mathfrak{E}\, dU_0 + dt\int\left|u\left(\varphi_x - T\frac{\partial\varphi_x}{\partial T}\right)\right|d\varpi + dt\int\left|u\frac{\partial}{\partial x}\left(\Theta - T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right) + \varepsilon f\frac{\partial V}{\partial x}\right|d\varpi - dt\int\left|\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial F}{\partial t}\right)\frac{\partial A}{\partial t}\right|d\varpi + \mathfrak{E}\, dU' + dt\int\left|u\left[-\frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial x} - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial\Theta}{\partial T}\right)\right]\right|d\varpi = 0.$$

La première ligne est nulle d'après (70); le reste se réduit, d'après (58), à

$$(131)\qquad \mathfrak{E}\, dU' - dt\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\left|\frac{\partial F}{\partial t}f\right|d\varpi = 0,$$

c'est-à-dire, d'après (125), à

$$\mathfrak{E}\, dU' + d\Pi = 0.$$

On en déduit en intégrant

$$\mathfrak{E}\, U' + \Pi = C,$$

C étant une fonction des seuls paramètres laissés constants dans la modification considérée, c'est-à-dire des paramètres géométriques fixant la position du système, de sa température et de son intensité d'aimantation en ses différents points, donc indépendante des courants. Or, si les courants sont nuls, nous savons qu'il en est de même de U' et de Π; donc la fonction C est nulle. L'expression (126) de l'énergie interne est ainsi, d'après (125),

$$(132)\quad \mathfrak{E}\, U = \mathfrak{E}\, U_0 + \mathfrak{P} + \int\left[\mathfrak{F}(\mathfrak{I}) - T\frac{\partial\mathfrak{F}(\mathfrak{I})}{\partial T}\right]d\varpi + M + W + \int\left[f(J) - T\frac{\partial f(J)}{\partial T}\right]d\varpi + \frac{\mathfrak{A}^2}{4}\int(Ff + Gg + Hh)\,d\varpi.$$

Le dernier terme est *l'énergie électrodynamique* du système; on voit que l'énergie interne ne contient aucun terme électromagnétique, c'est-à-dire dépendant à la fois des courants et de l'aimantation, ce qu'on exprime en disant que *l'énergie électromagnétique* du système est nulle. C'est la généralisation du théorème énoncé par Vaschy en 1890. Remarquons que l'égalité (132) reste valable pour un système en mouvement, sauf que le courant total (f, g, h) cesse d'être donné par les formules (58).

25. *Lois de l'aimantation.* — Imprimons au système une modification virtuelle isothermique quelconque de durée δt, laissant le système en repos. Dans une telle modification, on a, comme au n° 24,

$$\delta U + \delta Q = 0,$$

c'est-à-dire, d'après (132), (125) et (73),

$$(133) \quad \mathfrak{C}\,\delta U_0 + \delta \mathfrak{W} + \delta \int [\mathfrak{F}(\mathfrak{I}) + f(J)]\, d\varpi + \frac{\partial(M + W)}{\partial t}\,\delta t$$
$$+ \delta t\, \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \int \left| \frac{\partial F}{\partial t} f \right| d\varpi$$
$$+ \delta t \int \left| u\left(E_x - T\frac{\partial E_x}{\partial T} + \frac{\partial T}{\partial x}\,\frac{\partial \Theta}{\partial T} \right) \right| d\varpi = 0,$$

égalité où l'on doit faire maintenant

$$E_x = -\frac{\partial(\varepsilon V + \Theta)}{\partial x} + \varphi_x - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\,\frac{\partial \Phi}{\partial t},$$
$$A = -k\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\sqrt{\varepsilon'}\,\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right).$$

Si l'on remarque que (133) est l'égalité (128) complétée par les termes relatifs à la variation de l'aimantation, il résulte de (130) et (131) que cette égalité (133) se réduit aux seuls termes où figure l'aimantation, c'est-à-dire, d'après (20) et (21), à

$$(134) \quad \int \left| \left(\varepsilon' \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \frac{\mathcal{A}}{\varkappa} \right) \delta \mathcal{A} \right| d\varpi - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\,\delta t \int \left| \frac{\partial \Phi}{\partial t} f \right| d\varpi = 0.$$

Or on a, d'après (110),

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}\,\delta t = \int \left(\delta\mathcal{C}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - \delta\mathcal{B}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\varpi'.$$

$\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ étant des fonctions des coordonnées ξ, η, ζ de l'élément de volume $d\varpi'$, que nous écrivons avec un accent pour le distinguer de l'élément $d\varpi$ de coordonnées x, y, z; par suite,

$$\delta t \left| \frac{\partial \Phi}{\partial t} f \right| = -\int \left| \left(h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) \delta \mathcal{A} \right| d\varpi',$$

où f, g, h sont des fonctions de x, y, z, t. On en déduit

$$- \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \delta t \int \left| \frac{\partial \Phi}{\partial t} f \right| d\varpi$$
$$= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \int \left| \delta \mathcal{A} \int \left(h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\varpi \right| d\varpi'$$
$$= \int \left| \mathfrak{P}(\xi, \eta, \zeta, t) \delta \mathcal{A} \right| d\varpi'$$

d'après (107). En substituant cette expression dans (134) et en remplaçant par x, y, z les variables d'intégration ξ, η, ζ qui figurent dans la dernière intégrale, il vient

$$\int \left| \left(\epsilon' \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} + \frac{\mathcal{A}}{\varkappa} + \sqrt{\epsilon'} \mathfrak{P} \right) \delta \mathcal{A} \right| d\varpi = 0.$$

Cette égalité devant être satisfaite quelles que soient les variations virtuelles $\delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ en chaque point d'un aimant parfaitement doux, ces variations étant nécessairement nulles en chaque point d'un aimant permanent, on en conclut qu'on doit avoir en chaque point (x, y, z) d'un aimant parfaitement doux

$$(135) \quad (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = -\varkappa \left[\epsilon' \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial(x, y, z)} + \sqrt{\epsilon'} (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}) \right].$$

Ce sont les lois de l'aimantation des aimants parfaitement doux qui généralisent les formules (23). Les égalités

$$(24) \quad (\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \varkappa(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$$

subsistent donc, en appelant *champ magnétique* $\mathcal{H}$ en un point (x, y, z) quelconque du système, le vecteur de composantes

$$(136) \quad (\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = -\epsilon' \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial(x, y, z)} - \sqrt{\epsilon'} (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}),$$

soit, d'après (101),

$$(136')\quad \begin{cases} \mathcal{X} = -\varepsilon' \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} - \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'} \left(\dfrac{\partial H}{\partial y} - \dfrac{\partial G}{\partial z} \right), \\ \mathcal{Y} = -\varepsilon' \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} - \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'} \left(\dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial H}{\partial x} \right), \\ \mathcal{Z} = -\varepsilon' \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial z} - \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'} \left(\dfrac{\partial G}{\partial x} - \dfrac{\partial F}{\partial y} \right). \end{cases}$$

Il est la résultante du champ magnétique $-\varepsilon' \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial(x, y, z)}$ dû à l'aimantation du système et du champ magnétique $-\sqrt{\varepsilon'}(\mathfrak{L}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R})$ dû aux courants.

On déduit des formules (136') et d'après (7)

$$\left| \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x} \right| = -\varepsilon' \Delta \mathcal{V} = -4\pi\varepsilon' \left| \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \right|,$$

c'est-à-dire la relation antérieurement obtenue

$$(9)\qquad \left| \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{X} + 4\pi\varepsilon' \mathcal{A}) \right| = 0, \qquad \text{ou} \qquad \left| \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} \right| = 0,$$

($\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z$) étant l'induction magnétique définie par les formules (10). Cette équation (9), qui pourtant résulte immédiatement des lois de l'aimantation, est posée à titre d'hypothèse par les disciples de Maxwell ([1]).

26. *Loi de Laplace.* — Comme application des formules (136), calculons le champ magnétique ($\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$) en $M(x, y, z)$ dû à un élément de courant linéaire $PP' = ds$, d'origine $P(\xi, \eta, \zeta)$ et de composantes $d\xi, d\eta, d\zeta$. On a, d'après (107) et en remarquant que le champ d'intégration se réduit au volume $d\varpi$ de l'élément de courant,

$$\mathcal{X} = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'} \left(h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi.$$

Mais, ainsi qu'on l'a vu (n° 20), on a

$$(f, g, h)\, d\varpi = I(d\xi, d\eta, d\zeta),$$

([1]) L. Bloch, *Précis d'Électricité théorique*, p. 268.

Or on a, d'après (61), (32) et (29),

$$\Delta \frac{\partial V}{\partial t} = -4\pi \frac{\partial(e+E)}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2}\right) = -4\pi \frac{\partial(\sigma+\Sigma)}{\partial t},$$

d'où

$$\frac{\partial \mho}{\partial x} = \int \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial(e+E)}{\partial t} d\varpi + \int \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial(\sigma+\Sigma)}{\partial t} dS.$$

Cette égalité est entièrement générale; supposons maintenant le système en repos par rapport aux axes $Oxyz$ auxquels il est rapporté : elle devient, d'après les équations de continuité (59) et (60),

$$(103) \qquad \frac{\partial \mho}{\partial x} = -\int \frac{\partial r}{\partial x} \left| \frac{\partial f}{\partial \xi} \right| d\varpi - \int \frac{\partial r}{\partial x} | f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 | dS$$

et, en intégrant par parties,

$$\frac{\partial \mho}{\partial x} = \int \left(f \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial \xi} + g \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial \eta} + h \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial \zeta} \right) d\varpi.$$

Or, il résulte de l'expression $r^2 = |(x-\xi)^2|$ qu'on a

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial \xi} = -\frac{1}{r} + \frac{(\xi - x)^2}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial \eta} = \frac{(\xi - x)(\eta - y)}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial \zeta} = \frac{(\xi - x)(\zeta - z)}{r^3},$$

d'où

$$\frac{\partial \mho}{\partial x} = \int \left[-f + \left(\frac{\xi - x}{r} f + \frac{\eta - y}{r} g + \frac{\zeta - z}{r} h \right) \frac{\xi - x}{r} \right] \frac{d\varpi}{r}.$$

Cette expression, comparée à la première (99), donne la première des égalités

$$(104) \qquad (F, G, H) = \int \frac{(f, g, h)}{r} d\varpi + \frac{1-\lambda}{2} \frac{\partial \mho}{\partial (x, y, z)},$$

où f, g, h sont des fonctions de t et des variables d'intégration ξ, η, ζ.

19. *Propriétés du potentiel vecteur électrique.* — Les égalités (104) montrent que les fonctions F, G, H et leurs dérivées partielles du premier ordre sont continues dans tout

l'espace; on en déduit

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| = \int \left| f \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right| d\varpi + \frac{1-\lambda}{2} \Delta \mho.$$

Mais on a, en intégrant par parties,

$$\int \left| f \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right| d\varpi = -\int \left| f \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right| d\varpi$$
$$= \int \left| \frac{\partial f}{\partial \xi} \right| \frac{d\varpi}{r} + \int | f_1 \alpha_1 + f_2 \alpha_2 | \frac{dS}{r} = -\frac{\partial V}{\partial t}$$

d'après (61'); d'où, d'après (102),

(105) $$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = -\lambda \frac{\partial V}{\partial t}.$$

D'autre part, la première (104) donne

$$\Delta F = -4\pi f + \frac{1-\lambda}{2} \frac{\partial \Delta \mho}{\partial x},$$

d'où, d'après (102), la première des formules

(106) $$\Delta(F, G, H) = -4\pi(f, g, h) + (1-\lambda) \frac{\partial^2 V}{\partial(x, y, z)\, \partial t}.$$

Enfin, les formules (101) s'écrivent, d'après (104),

(107) $$\begin{cases} \mathfrak{P}(x, y, z, t) = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \displaystyle\int \left(h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\varpi, \\ \mathfrak{Q}(x, y, z, t) = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \displaystyle\int \left(f \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - h \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) d\varpi, \\ \mathfrak{R}(x, y, z, t) = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \displaystyle\int \left(g \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - f \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) d\varpi, \end{cases}$$

où f, g, h sont des fonctions de ξ, η, ζ, t.

20. *Potentiel vecteur magnétique et potentiel vecteur total.* — Les conditions d'équivalence des feuillets magnétiques et des courants uniformes (n° 14) conduisent à énoncer le postulat suivant :

Tout élément magnétique engendre la même force

électromotrice d'induction que le courant uniforme équivalent au feuillet magnétique de même volume et de même intensité d'aimantation que l'élément considéré.

Soit alors $d\varpi$ un élément magnétique du système au point (ξ, η, ζ) où l'intensité d'aimantation est $\mathfrak{J}$; l'intensité I du courant uniforme équivalent au feuillet de puissance Φ est donnée par la première (79). Or, dS étant la surface du feuillet et l son épaisseur, on a $\Phi = l\mathfrak{J}$, $d\varpi = l\,dS$; de sorte que (79) devient

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} I\,dS = \sqrt{\varepsilon'}\,\mathfrak{J}\,d\varpi. \tag{108}$$

Le courant I étant uniforme, (103) montre que les dérivées du premier ordre en x, y, z de la fonction $\mathfrak{V}$ relative à ce courant sont nulles; le potentiel vecteur du courant I est donc, d'après (104),

$$(F, G, H) = \int \frac{(f, g, h)}{r}\,d\varpi', \tag{109}$$

l'intégration étant étendue au volume du circuit fermé C qui borde l'élément dS.

Soit alors $d\varpi' = \omega\,ds$ un tronçon de C, de longueur ds et de section ω, au point (ξ, η, ζ); comme $\omega f = I\frac{d\xi}{ds}$, on a $f\,d\varpi' = I\,d\xi$, de sorte que la première (109) donne, d'après (108),

$$F = I\int\frac{d\xi}{r} = I\left(\gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} - \beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)dS$$
$$= \frac{\sqrt{\varepsilon'}}{\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}}\mathfrak{J}\left(\gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} - \beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right)d\varpi,$$

la première intégrale s'étendant au circuit fermé C, la seconde expression résultant de l'application de la formule de Stokes à ce circuit infiniment petit et α, β, γ désignant les cosinus directeurs de la normale positive à dS (¹). Si l'on remarque que α, β, γ sont précisément les cosinus directeurs

(¹) Les axes de coordonnées $Oxyz$ sont supposés avoir la disposition habituelle, c'est-à-dire telle qu'un observateur, les pieds en O et placé suivant Oz, voie s'effectuer de sa gauche vers sa droite la plus petite rotation amenant Ox sur Oy.

de $\mathfrak{J}$, on voit que $\mathfrak{J}\gamma = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{J}\beta = \mathfrak{B}$; si donc on pose

$$
(110) \quad \begin{cases}
\Phi(x, y, z, t) = \displaystyle\int \left(\mathfrak{C} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - \mathfrak{B} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} \right) d\varpi, \\
\Psi(x, y, z, t) = \displaystyle\int \left(\mathfrak{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta} - \mathfrak{C} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right) d\varpi, \\
\Omega(x, y, z, t) = \displaystyle\int \left(\mathfrak{B} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} - \mathfrak{A} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} \right) d\varpi,
\end{cases}
$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ étant des fonctions de ξ, η, ζ, t et les intégrations s'étendant au système entier, les fonctions F, G, H dues à l'aimantation du système seront respectivement

$$
(111) \qquad \frac{\sqrt{\epsilon'}}{\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}} (\Phi, \Psi, \Omega).
$$

Le vecteur de composantes Φ, Ψ, Ω est le *potentiel vecteur magnétique* au point (x, y, z).

Les composantes de la force électromotrice d'induction électromagnétique sont alors données par (98) ou (100) et (101), où l'on a remplacé F, G, H par les fonctions (111).

On appelle *potentiel vecteur total* au point (x, y, z) le vecteur ayant pour composantes

$$
(112) \qquad (\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}) = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} (\text{F}, \text{G}, \text{H}) + \sqrt{\epsilon'} (\Phi, \Psi, \Omega) \quad [1];
$$

les composantes $\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_y$, $\mathcal{E}_z$ de la force électromotrice totale d'induction, tant électrodynamique qu'électromagnétique, sont ainsi, d'après (98),

$$
(113) \quad \begin{cases}
\mathcal{E}_x \, dt = - \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \left(\delta\mathcal{F} + \mathcal{F} \dfrac{\partial \, \delta x}{\partial x} + \mathcal{G} \dfrac{\partial \, \delta y}{\partial x} + \mathcal{H} \dfrac{\partial \, \delta z}{\partial x} \right), \\
\mathcal{E}_y \, dt = - \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \left(\delta\mathcal{G} + \mathcal{F} \dfrac{\partial \, \delta x}{\partial y} + \mathcal{G} \dfrac{\partial \, \delta y}{\partial y} + \mathcal{H} \dfrac{\partial \, \delta z}{\partial y} \right), \\
\mathcal{E}_z \, dt = - \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \left(\delta\mathcal{H} + \mathcal{F} \dfrac{\partial \, \delta x}{\partial z} + \mathcal{G} \dfrac{\partial \, \delta y}{\partial z} + \mathcal{H} \dfrac{\partial \, \delta z}{\partial z} \right),
\end{cases}
$$

[1] Duhem appelle les fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, les *fonctions totales de Helmholtz*.

I étant l'intensité du courant, de sorte qu'en remplaçant les dérivées par leurs valeurs, il vient

$$\mathcal{X} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\,\mathrm{I}\,\frac{(y-\eta)\,d\zeta-(z-\zeta)\,d\eta}{r^3} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\,\frac{\mathrm{I}\,ds}{r^2}(\gamma\beta'-\beta\gamma'),$$

α, β, γ désignant les cosinus directeurs de ds, α', β', γ' ceux de la droite PM.

Soient, d'autre part, θ l'angle P'PM et α'', β'', γ'' les cosinus directeurs de la demi-normale Mn en M au plan P'PM, menée dans un sens tel qu'un observateur, placé le long de PP' de manière que le courant I lui entre par les pieds et lui sorte par la tête et regardant le point M, voie cette demi-normale dirigée de sa droite vers sa gauche; on a

$$\gamma\beta'-\beta\gamma' = \alpha''\sin\theta,$$

d'où la première des formules

$$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = (\alpha'', \beta'', \gamma'')\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\,\frac{\mathrm{I}\,ds\sin\theta}{r^2},$$

qui expriment que le champ magnétique dû à l'élément de courant est dirigé suivant la normale Mn et a pour valeur

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\,\frac{\mathrm{I}\,ds\sin\theta}{r^2}.$$

C'est la loi de Laplace.

27. *Propriétés du potentiel vecteur total.* — D'après les formules (112), les propriétés du potentiel vecteur total ($\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$) résultent immédiatement de celles des potentiels vecteurs électrique et magnétique.

Tout d'abord, les fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ sont continues dans tout l'espace; d'après (105) et (119), on a

$$(137)\qquad \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z} = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\lambda\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}.$$

Il résulte de la continuité des dérivées partielles du premier ordre de F, G, H, qu'on a, en tout point de la surface séparative de deux milieux 1 et 2,

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial n_1}+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial n_2} = \sqrt{\varepsilon'}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial n_2}\right),$$

d'où, d'après (116), la première des égalités

$$(138) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial n_1} + \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial n_2} = 4\pi\sqrt{\varepsilon'}(\mathcal{C}_1\beta_1 - \mathcal{B}_1\gamma_1 + \mathcal{C}_2\beta_2 - \mathcal{B}_2\gamma_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Ce sont les équations aux surfaces séparatives, quand les deux milieux sont des aimants permanents, les seconds membres étant alors des fonctions connues. Dans le cas contraire, les seconds membres s'expriment simplement au moyen de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$. En effet, remplaçons dans (136') F, G, H par leurs valeurs tirées de (112) et tenons compte de (120); il vient

$$\mathcal{X} = -\sqrt{\varepsilon'}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right) - 4\pi\varepsilon'\mathcal{A},$$

de là, d'après (10), la première des formules générales

$$(139) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B}_x = -\sqrt{\varepsilon'}\left(\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right), \\ \mathcal{B}_y = -\sqrt{\varepsilon'}\left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right), \\ \mathcal{B}_z = -\sqrt{\varepsilon'}\left(\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right), \end{array} \right.$$

qui s'écrivent, en chaque point d'un aimant parfaitement doux,

$$(139') \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu\mathcal{X} = -\sqrt{\varepsilon'}\left(\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right), \\ \mu\mathcal{Y} = -\sqrt{\varepsilon'}\left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right), \\ \mu\mathcal{Z} = -\sqrt{\varepsilon'}\left(\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right). \end{array} \right.$$

Les formules (139) entraînent une conséquence importante : en effet, la force électromotrice totale induite dans un circuit fermé immobile est

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t}dx + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t}dy + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}dz,$$

l'intégrale étant prise le long du circuit; elle devient, par application de la formule de Stokes, d'après (139) et en désignant par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale

positive à la surface S du circuit,

$$(140)\quad \mathcal{E} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial t}\int\left|\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y} - \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial z}\right)\alpha\right| dS = -\frac{\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\varepsilon'}}\frac{\partial}{\partial t}\int|\mathfrak{B}_x\alpha|\,dS.$$

Cette formule, où la dernière intégrale représente le flux de l'induction magnétique à travers la surface du circuit, est la généralisation de la formule (80), qui supposait implicitement le milieu ambiant non magnétique et où Φ désignait le flux du champ magnétique; elle est posée à titre d'hypothèse, ou du moins sans raisons bien convaincantes, par Maxwell et ses disciples.

Revenons à la recherche de ce que deviennent les conditions aux limites (138) lorsque les milieux 1 et 2 sont parfaitement doux; en remplaçant dans (139') $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ par leurs valeurs (24), il vient

$$(141)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A} = -\dfrac{\sqrt{\varepsilon'}}{\mu}\varkappa\left(\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial y} - \dfrac{\partial\mathcal{G}}{\partial z}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

de sorte que les égalités (138) deviennent

$$(142)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\mu_1}\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial n_1} + \dfrac{4\pi\varepsilon'\varkappa_1}{\mu_1}\left(\alpha_1\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial x} + \beta_1\dfrac{\partial\mathcal{G}}{\partial x} + \gamma_1\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}\right) \\ + \dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial n_2} + \dfrac{4\pi\varepsilon'\varkappa_2}{\mu_2}\left(\alpha_2\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial x} + \beta_2\dfrac{\partial\mathcal{G}}{\partial x} + \gamma_2\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Telles sont les équations aux surfaces séparatives, qui remplacent (138) quand les deux milieux contigus sont parfaitement doux. Dans le cas mixte, où le milieu 1 est un aimant permanent et le milieu 2 un aimant parfaitement doux, on ne doit effectuer la substitution (141) que dans les deux derniers termes de chacune des égalités (138), ce qui donne

$$(143)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial n_1} + \dfrac{1}{\mu_2}\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial n_2} + \dfrac{4\pi\varepsilon'\varkappa_2}{\mu_2}\left(\alpha_2\dfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial x} + \beta_2\dfrac{\partial\mathcal{G}}{\partial x} + \gamma_2\dfrac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}\right) \\ \quad = 4\pi\sqrt{\varepsilon'}(\mathfrak{C}_1\beta_1 - \mathfrak{B}_1\gamma_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

où les seconds membres sont des fonctions données.

28. *Les six équations de Maxwell.* — On déduit des formules (123)

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} \right),$$

d'où, d'après (139), la première des relations

$$(144) \quad \begin{cases} \sqrt{\varepsilon'} \left(\dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z} \right) = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial \mathfrak{M}_x}{\partial t}, \\ \sqrt{\varepsilon'} \left(\dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} \right) = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial \mathfrak{M}_y}{\partial t}, \\ \sqrt{\varepsilon'} \left(\dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y} \right) = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \dfrac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial t}, \end{cases}$$

où $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ peuvent être remplacés par $\mu(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ si le milieu considéré est un aimant parfaitement doux. Elles constituent les trois premières équations de Maxwell; Maxwell et ses disciples les déduisent de l'expression (140), admise *a priori*, de la force électromotrice induite dans un circuit fermé immobile.

Les égalités (136') donnent d'autre part

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'} \left(\Delta F - \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \right),$$

d'où, d'après (105) et (106), la première des équations

$$(145) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'} \left(-4\pi f + \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} \right), \\ \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'} \left(-4\pi g + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y \partial t} \right), \\ \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} = \dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'} \left(-4\pi h + \dfrac{\partial^2 V}{\partial z \partial t} \right). \end{cases}$$

Au lieu de ces équations, Maxwell et ses disciples écrivent les suivantes :

$$(145') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'}\, 4\pi f, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'}\, 4\pi g, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} = -\dfrac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}} \sqrt{\varepsilon'}\, 4\pi h, \end{cases}$$

qui constituent les trois autres équations de Maxwell. Ces dernières sont la traduction analytique généralisée de cette hypothèse que le travail du champ magnétique, le long d'une courbe fermée enlaçant un courant d'intensité I, est égal à $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}4\pi I$. Les équations (145) conduisent à la même proposition, chaque fois que le potentiel électrique est constant, c'est-à-dire que les courants sont uniformes.

CHAPITRE IV.

LES ACTIONS ÉLECTRODYNAMIQUES ET ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

---

29. *Travail élémentaire des forces intérieures.* — Imposons au système une modification virtuelle quelconque; on a, d'après le premier principe de la Thermodynamique,

$$\mathfrak{G}_e = \delta\Sigma \frac{mv^2}{2} + \mathfrak{C}(\delta U + \delta Q),$$

$\mathfrak{G}_e$ étant le travail élémentaire des forces extérieures, $\delta\Sigma \frac{mv^2}{2}$ et δU les variations correspondantes de la force vive et de l'énergie interne du système, δQ la quantité de chaleur dégagée. D'autre part, le théorème des forces vives appliqué à la même modification donne

$$\delta\Sigma \frac{mv^2}{2} = \mathfrak{G}_e + \mathfrak{G}_i,$$

$\mathfrak{G}_i$ étant le travail élémentaire correspondant des forces intérieures. On en déduit

$$(146) \qquad \mathfrak{G}_i = -\mathfrak{C}(\delta U + \delta Q),$$

ces deux dernières quantités résultant de l'application des égalités (73) et (132).

On peut, sans restreindre la généralité des résultats, supposer la modification isothermique et l'aimantation de chaque particule invariable, car cette hypothèse ne modifie évidemment pas l'expression des forces électrodynamiques et électromagnétiques. Or, toute variation virtuelle δ peut être considérée comme la somme de deux variations, l'une δ_1 résultant du déplacement du système sans changement de son état physique, l'autre δ_2 résultant de ce changement

avec les premières; comme d'ailleurs on peut écrire

$$\delta\Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{4}\int\int\delta(\Xi\, d\varpi\, d\varpi') - \frac{\mathfrak{A}^2}{4}\int\int\delta'(\Xi\, d\varpi\, d\varpi'),$$

la variation δ du second membre portant seulement sur les six variables non accentuées relatives à l'élément $d\varpi$ et la variation δ' sur les autres relatives à l'élément $d\varpi'$, les deux intégrales sont évidemment égales; on a donc

$$(151)\qquad \delta\Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\int\delta(\Xi\, d\varpi\, d\varpi')$$
$$= -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\int(\delta\Xi\, d\varpi\, d\varpi' + \Xi\, d\varpi'\,\delta\, d\varpi),$$

les variations des second et troisième membres étant relatives aux seules variables non accentuées correspondant à $d\varpi$. On a ainsi, d'après (149) et (150),

$$\delta\Xi = |\, f\,\delta f' + f'\,\delta f\,|,$$
$$\delta f' = \frac{\partial f'}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f'}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f'}{\partial z}\delta z,$$

et comme

$$\int\int f\frac{\partial f'}{\partial x}\delta x\, d\varpi\, d\varpi' = \int f\,\delta x\, d\varpi\frac{\partial}{\partial x}\int f'\, d\varpi' = \int f\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\delta x\, d\varpi,$$

l'égalité (151) s'écrit

$$\delta\Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\left|f\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\delta z\right)\right| d\varpi$$
$$-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int(|\,\mathrm{F}\,\delta f\,|\, d\varpi + |\,\mathrm{F} f\,|\,\delta\, d\varpi).$$

Or, on a également, d'après (124),

$$2\,\delta\Pi = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int(|\, f\,\delta\mathrm{F} + \mathrm{F}\,\delta f\,|\, d\varpi + |\,\mathrm{F} f\,|\,\delta\, d\varpi),$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$(152)\quad \delta\Pi = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\left|f\left(-\delta\mathrm{F} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}\delta z\right)\right| d\varpi.$$

31. *Forces électrodynamiques.* — D'après (147) et (152), le travail virtuel des forces électrodynamiques a pour expres-

sion

$$(153)\qquad = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\left|f\left(F\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}+G\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}+H\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)\right|d\varpi$$
$$+\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int\left|f\left(\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta z\right)\right|d\varpi.$$

Transformons la première intégrale par une intégration par parties; en remarquant que les fonctions F, G, H sont continues à la traversée d'une surface séparative S de deux milieux contigus 1 et 2, mais que le déplacement virtuel $\delta(x, y, z)$ peut être discontinu, on a

$$\int\left|f\left(F\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}+G\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}+H\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)\right|d\varpi$$
$$=-\int(|f_1\alpha_1||F\,\delta x_1|+|f_2\alpha_2||F\,\delta x_2|)\,dS$$
$$-\int\left[\left|f\left(\frac{\partial F}{\partial x}\delta x+\frac{\partial G}{\partial x}\delta y+\frac{\partial H}{\partial x}\delta z\right)\right|+\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||F\,\delta x|\right]d\varpi,$$

d'où finalement, d'après (101),

$$(154)\quad \tau=-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\int(|f_1\alpha_1||F\,\delta x_1|+|f_2\alpha_2||F\,\delta x_2|)\,dS$$
$$-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\left|\left[-g\mathfrak{R}+h\mathfrak{Q}+\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}F\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)\right]\delta x\right|d\varpi.$$

De là, les résultats suivants :

Un système de corps continus isotropes, parcouru par des courants, subit deux sortes de forces électrodynamiques :

1° Des forces appliquées à chaque élément de surface de discontinuité; en un point quelconque de cette surface s'exerce une pression de composantes

$$(155)\qquad -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}(f\alpha+g\beta+h\gamma)(F,\,G,\,H);$$

2° Des forces appliquées à chaque élément de volume du milieu; en un point quelconque (x, y, z) de ce milieu s'exerce une force par unité de volume de composantes

$$(156)\qquad \begin{cases} -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left[-g\mathfrak{R}+h\mathfrak{Q}+\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}F\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)\right], \\ -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left[-h\mathfrak{P}+f\mathfrak{R}+\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}G\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)\right], \\ -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left[-f\mathfrak{Q}+g\mathfrak{P}+\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}H\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)\right]. \end{cases}$$

Ces expressions font ainsi connaître les forces électrodynamiques les plus générales. Si deux milieux contigus 1 et 2 adhèrent le long de leur surface séparative, les pressions (155) se composent en une pression unique de composantes

$$-\frac{\mathfrak{A}^2}{2}|f_1\alpha_1+f_2\alpha_2|(F, G, H),$$

qui, d'après (60), est nulle si les courants sont uniformes. Ces pressions sont donc en général inobservables.

32. *Application aux courants linéaires.* — Comme application des formules (156), nous allons calculer la force électrodynamique qu'un courant linéaire I′ exerce sur un élément $d\varpi = \omega\, ds$ de courant linéaire I; la composante X suivant Ox de cette force infiniment petite est, d'après (156), (107) et (99),

$$\text{(157)}\quad X = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}d\varpi\int\left[-g\left(g'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}-f'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)+h\left(f'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}-h'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1+\lambda}{2r}f'+\frac{1-\lambda}{2r}\left|\frac{x'-x}{r}f'\right|\frac{x'-x}{r}\right)\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\right]d\varpi',$$

les lettres x, y, z; f, g, h étant relatives à l'élément $d\varpi$, les lettres x', y', z'; f', g', h' à l'élément $d\varpi' = \omega'\, ds'$ du courant linéaire I′ et l'intégration s'étendant à tout le volume de ce courant. Or, la première ligne sous le signe somme s'écrit

$$f'\left(f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+g\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+h\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)-(ff'+gg'+hh')\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}$$

et comme $(f, g, h)\,d\varpi = I(dx, dy, dz)$, dx, dy, dz étant les composantes de ds, avec des formules analogues relatives à $d\varpi'$, on a

$$\left|f\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right|d\varpi = I\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}ds,$$
$$|ff'|\,d\varpi\,d\varpi' = II'\cos(ds, ds')\,ds\,ds'.$$

Comme d'autre part

$$\left|\frac{x'-x}{r^3}f'\right|d\varpi' = -\left|f'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\right|d\varpi' = -I'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}ds'$$

et que, d'après (63),

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| d\varpi = \frac{\partial I}{\partial s}\, ds,$$

l'égalité (157) devient, en désignant maintenant, comme au n° 14, par ω l'angle des éléments ds, ds',

$$(158)\quad X = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\, I\, ds \int \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos\omega - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} \right) I'\, ds'$$
$$- \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{\partial I}{\partial s}\, ds \int \left[\frac{1+\lambda}{2r} \frac{dx'}{ds'} + \frac{1-\lambda}{2} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'} (x-x') \right] I'\, ds'.$$

Cette expression est générale; nous allons maintenant la transformer en supposant I' continu tout le long de s' et nul aux deux extrémités de cette courbe si elle n'est pas fermée. Nous avons alors, en intégrant par parties et en remarquant qu'on peut remplacer dx' par $-d(x-x')$, puisque l'intégration se fait le long de s',

$$\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{dx'}{ds'} I'\, ds' = -\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} I'\, d(x-x')$$
$$= \int (x-x') \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial I'}{\partial s'} + I' \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s\, \partial s'} \right) ds',$$
$$\int \frac{dx'}{ds'} \frac{I'}{r}\, ds' = -\int \frac{I'}{r}\, d(x-x')$$
$$= \int (x-x') \left(\frac{1}{r} \frac{\partial I'}{\partial s'} + I' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'} \right) ds',$$

de sorte que (158) devient, en tenant compte de ce que

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{x-x'}{r^3},$$

$$X = -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\, I\, ds \int \left[\left(\frac{\cos\omega}{r^2} + r \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s\, \partial s'} \right) I' + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s} \frac{\partial I'}{\partial s'} \right] \frac{x-x'}{r}\, ds'$$
$$- \frac{\mathfrak{A}^2}{2} \frac{\partial I}{\partial s}\, ds \int \left(r \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'} I' + \frac{1+\lambda}{2} \frac{\partial I'}{\partial s'} \right) \frac{x-x'}{r}\, ds'.$$

Cette formule et deux autres analogues montrent qu'entre les deux éléments de courants (I, ds), (I', ds') s'exerce une force de répulsion dirigée suivant leur droite de jonction et ayant pour valeur

$$(159)\quad -\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\left[\left(\frac{\cos\omega}{r^2} + r\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s\,\partial s'}\right) \mathrm{II}' + r\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s}\,\mathrm{I}\,\frac{\partial \mathrm{I}'}{\partial s'} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial s'}\,\mathrm{I}'\,\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial s}\right) + \frac{1+\lambda}{2}\,\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial s}\,\frac{\partial \mathrm{I}'}{\partial s'}\right] ds\,ds'.$$

En particulier, si les courants I, I' sont uniformes, les dérivées $\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial s}$, $\frac{\partial \mathrm{I}'}{\partial s'}$ sont nulles et l'expression (159) se réduit à la formule d'Ampère.

Remarquons que le dernier terme de (159) est indépendant de la distance r des deux éléments; ce résultat serait inacceptable si l'action mutuelle de deux éléments de courants devait être regardée comme une réalité physique, alors qu'elle n'est qu'une abstraction. La seule réalité physique est l'action d'un courant fini I' sur un élément de courant, et la formule (158) montre que cette action tend bien vers zéro, quand la distance du courant I' à l'élément augmente indéfiniment.

33. *Forces électromagnétiques.* — Développons l'expression

$$(148)\quad \tau' = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\epsilon'}\int\left| J\left(\delta\Phi + \Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + \Omega\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)\right| d\varpi$$

du travail élémentaire des forces électromagnétiques, où Φ, Ψ, Ω sont les fonctions de x, y, z, t définies par (110) ou (118). Duhem en a effectué le calcul en faisant intervenir dans l'expression de $\delta\Phi$ les dérivées secondes de $\frac{1}{r}$, ce qui conduit à des intégrales n'ayant de sens que si r n'est nul en aucun point du champ d'intégration. Les formules ainsi données par Duhem supposent donc essentiellement, ainsi qu'il le dit lui-même, que les aimants et les courants n'ont aucune partie commune; nous allons calculer $\delta\Phi$ en nous affranchissant de cette restriction.

Partons à cet effet des formules (118) et (117), que nous écrirons

$$(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \int \frac{(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})}{r} d\varpi',$$

où $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ sont des fonctions de t et des coordonnées ξ, η, ζ de l'élément $d\varpi'$, que nous accentuons pour le distinguer de l'élément $d\varpi$ de coordonnées x, y, z. On a

$$\delta\Phi = \left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}\delta x\right| - \frac{\partial\,\delta'\mathfrak{N}}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta'\mathfrak{M}}{\partial z},$$

les variations δ' étant relatives aux seules variations $\delta(\xi, \eta, \zeta)$ des coordonnées de $d\varpi'$; d'où

$$f\delta\Phi = f\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}\delta x\right| - \frac{\partial}{\partial y}(f\,\delta'\mathfrak{N})$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}(f\,\delta'\mathfrak{M}) + \frac{\partial f}{\partial y}\delta'\mathfrak{N} - \frac{\partial f}{\partial z}\delta'\mathfrak{M}$$

et, par suite, en remarquant que $\delta'(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ sont des fonctions de x, y, z continues dans tout l'espace,

$$(160)\quad \int |f\delta\Phi|\, d\varpi = \int \left| f\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\delta z\right)\right| d\varpi + \mathrm{A},$$

en posant

$$(161)\quad \mathrm{A} = \int |(\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2)\,\delta'\mathfrak{N} - (\gamma_1 f_1 + \gamma_2 f_2)\,\delta'\mathfrak{M}\,|\, dS$$
$$+ \int \left|\frac{\partial f}{\partial y}\delta'\mathfrak{N} - \frac{\partial f}{\partial z}\delta'\mathfrak{M}\right| d\varpi.$$

Or, on ne change évidemment pas la nature des forces électromagnétiques en considérant, avec Duhem, une modification où chaque particule $d\varpi'$ se déplace à la façon d'un solide, auquel le vecteur $\mathfrak{I}$ soit invariablement lié; dans une telle modification, on a $\delta' d\varpi' = 0$ et

$$\delta'\mathcal{A} = \mathcal{C}\omega' - \mathcal{B}\omega'', \quad \delta'\mathcal{B} = \mathcal{A}\omega'' - \mathcal{C}\omega, \quad \delta'\mathcal{C} = \mathcal{B}\omega - \mathcal{A}\omega',$$

$(\omega, \omega', \omega'')$ étant la rotation moyenne correspondante de la particule $d\varpi'$; d'où

$$\delta'\mathfrak{L} = \int \left(\frac{\mathcal{C}\omega' - \mathcal{B}\omega''}{r} + \mathcal{A}\left|\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\delta\xi\right|\right) d\varpi',$$

Ces variations ne dépendent de x, y, z que par l'intermédiaire de r; si donc on considère les fonctions $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{R}'$ de ξ, η, ζ, t définies par trois égalités telles que

$$\mathfrak{P}' = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\frac{d\varpi}{r} + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\frac{\beta_1 h_1 + \beta_2 h_2 - \gamma_1 g_1 - \gamma_2 g_2}{r}\,dS,$$

qui deviennent par une transformation évidente

$$\mathfrak{P}' = -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\left(h\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - g\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)d\varpi = \mathfrak{P}(\xi, \eta, \zeta, t),$$

d'après (107) et en tenant compte de ce que $\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}, \ldots,$ l'expression (161) devient

$$\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{A} = -\int\left|\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\xi} + \mathfrak{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\xi} + \mathfrak{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\xi}\right)\delta\xi + (\mathfrak{B}\mathfrak{R} - \mathfrak{C}\mathfrak{Q})\omega\right|d\varpi'.$$

L'expression (160) s'écrit par suite

$$(162)\quad \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int|f\delta\Phi|\,d\varpi$$
$$= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\int\left|f\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\delta z\right)\right|d\varpi$$
$$-\int\left|\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\xi} + \mathfrak{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\xi} + \mathfrak{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\xi}\right)\delta\xi + (\mathfrak{B}\mathfrak{R} - \mathfrak{C}\mathfrak{Q})\omega\right|d\varpi,$$

où $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ sont des fonctions de ξ, η, ζ, t définies par les formules (107), où l'on a permuté les lettres x, y, z et ξ, η, ζ. On a ainsi, d'après (148) et (162),

$$\tau' = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\epsilon'}\int\left|f\left(\Phi\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \Psi\frac{\partial\,\delta y}{\partial x} + \Omega\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)\right|d\varpi$$
$$+ \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\epsilon'}\int\left|f\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\delta z\right)\right|d\varpi$$
$$- \sqrt{\epsilon'}\int\left|\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\xi} + \mathfrak{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\xi} + \mathfrak{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\xi}\right)\delta\xi + (\mathfrak{B}\mathfrak{R} - \mathfrak{C}\mathfrak{Q})\omega\right|d\varpi'.$$

Or, les deux premières intégrales sont analogues à celles de (153); de sorte que, par un calcul analogue à celui qui a conduit à (154), où les fonctions $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ seraient remplacées

par leurs valeurs (101), il vient en définitive

$$
\begin{aligned}
\tau' = & -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\int(|f_1\alpha_1||\Phi\,\delta x_1| + |f_2\alpha_2||\Phi\,\delta x_2|)\,dS \\
& -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\int\left|\left[-g\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+h\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)+\Phi\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\right]\delta x\right|d\varpi \\
& -\sqrt{\varepsilon'}\int\left|\left(\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\xi}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial\xi}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\xi}\right)\delta\xi+(\mathcal{B}\mathfrak{R}-\mathcal{C}\mathfrak{Q})\,\omega\right|d\varpi',
\end{aligned}
$$

les deux intégrales triples étant étendues au système entier. Les deux premières intégrales font alors connaître les actions de l'aimantation sur les courants, la troisième les actions des courants sur l'aimantation. De là, les résultats suivants :

Un système de corps continus isotropes aimantés et parcourus par des courants subit quatre sortes d'actions électromagnétiques; l'aimantation exerce :

1° Des forces appliquées à chaque élément de surface d'un conducteur; en un point quelconque de cette surface s'exerce une pression de composantes

$$-\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}(f\alpha+g\beta+h\gamma)(\Phi,\ \Psi,\ \Omega);$$

2° Des forces appliquées à chaque élément de volume d'un conducteur; en un point quelconque (x, y, z) de ce conducteur s'exerce une force par unité de volume de composantes

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\left[-g\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+h\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)+\Phi\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)\right], \\
& -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\left[-h\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)+f\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+\Psi\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)\right], \\
& -\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\left[-f\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)+g\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)+\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Les courants exercent :

1° Des forces appliquées à chaque particule aimantée; en un point quelconque (ξ, η, ζ) du milieu aimanté s'exerce une force par unité de volume de composantes

$$-\sqrt{\varepsilon'}\left[\mathcal{A}\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}+\mathcal{B}\frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}+\mathcal{C}\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right];$$

2° Des couples appliqués à chaque particule aimantée; en un point quelconque (ξ, η, ζ) du milieu aimanté s'exerce un couple par unité de volume de composantes

$$-\sqrt{\varepsilon'}(\mathfrak{B}\mathfrak{R} - \mathfrak{C}\mathfrak{Q}), \quad -\sqrt{\varepsilon'}(\mathfrak{C}\mathfrak{P} - \mathfrak{A}\mathfrak{R}), \quad -\sqrt{\varepsilon'}(\mathfrak{A}\mathfrak{Q} - \mathfrak{B}\mathfrak{P}).$$

Telles sont les actions électromagnétiques les plus générales; elles coïncident avec celles données par Duhem dans l'hypothèse que les courants sont distincts des aimants. Si l'on remarque que $-\sqrt{\varepsilon'}(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R})$ est le champ magnétique créé par les courants au point (ξ, η, ζ) où se trouve la particule aimantée $d\varpi'$, on voit, d'après (12), que le champ magnétique d'un courant exerce sur un aimant les mêmes actions que le champ magnétique d'un aimant.

CHAPITRE V.

LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE.

34. *Le problème général de l'Électrodynamique.* — Le problème général de l'Électrodynamique consiste à déterminer à chaque instant l'état électrique et magnétique d'un système, connaissant son état initial. Nous allons voir que, si l'on connaît le potentiel vecteur total ($\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$) d'un système en repos, toutes les grandeurs définissant l'état électrique et magnétique du système sont déterminées.

En effet, d'après (137), le potentiel électrique V s'obtient par une quadrature; le champ électrique (X, Y, Z) se trouve ensuite déterminé par (123), la force électromotrice totale (E_x, E_y, E_z) par (121), le courant de conduction (u, v, w) par (67), l'intensité de polarisation (A, B, C) par (44), le courant total (f, g, h) par (58), les densités électriques cubique e et superficielle σ par (31) et (32), l'induction magnétique ($\mathfrak{B}_x$, $\mathfrak{B}_y$, $\mathfrak{B}_z$) par (139), le champ magnétique ($\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$) par (10) à l'intérieur d'un aimant permanent, par (139') à l'intérieur d'un aimant parfaitement doux; dans ce dernier cas, l'intensité d'aimantation ($\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathcal{C}$) s'obtient par (24). Enfin, le potentiel magnétique $\mathcal{V}$ est déterminé par (2).

Nous avons antérieurement reconnu que les fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ sont continues à la traversée d'une surface séparative et satisfont aux conditions (138), (142) ou (143), suivant que les deux corps contigus sont tous deux des aimants permanents, des aimants parfaitement doux, ou que l'un est un aimant permanent, l'autre un aimant parfaitement doux. Cherchons donc maintenant les équations indéfinies que vérifient ces fonctions, en supposant pour simplifier chaque corps homogène et dépourvu de forces électromotrices hydro-électriques; considérons tout d'abord le cas d'un aimant parfaitement doux.

En posant pour abréger

$$(163)\qquad \mathfrak{S} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial z},$$

la première (115) devient, d'après (24) et (139'),

$$\Delta\Phi = \frac{4\pi\sqrt{\varepsilon'}\kappa}{\mu}\left(\Delta\mathfrak{F} - \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x}\right).$$

La première (106) devient alors, d'après la première (112),

$$(164)\qquad \Delta\mathfrak{F} - \frac{4\pi\varepsilon'\kappa}{\mu}\left(\Delta\mathfrak{F} - \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial x}\right) = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left[-4\pi f + (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial t}\right].$$

Mais la première (58) s'écrit, d'après (123) et (44), et en remarquant que, par suite de l'homogénéité et l'absence de sources hydro-électriques, les formules (67) se réduisent à

$$(165)\qquad \begin{gathered} \rho(u, v, w) = (X, Y, Z), \\ f = -\frac{1}{\rho}\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right) - k\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right), \end{gathered}$$

de sorte que (164) devient la première des équations

$$(166)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta\mathfrak{F}}{\mu} - 2\pi\mathfrak{A}^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathfrak{F}}{\rho} + k\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right) &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}V + \frac{K\mu-\lambda}{\mu}\frac{\partial V}{\partial t}\right), \\ \frac{\Delta\mathfrak{G}}{\mu} - 2\pi\mathfrak{A}^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathfrak{G}}{\rho} + k\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t}\right) &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}V + \frac{K\mu-\lambda}{\mu}\frac{\partial V}{\partial t}\right), \\ \frac{\Delta\mathfrak{H}}{\mu} - 2\pi\mathfrak{A}^2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathfrak{H}}{\rho} + k\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right) &= \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}V + \frac{K\mu-\lambda}{\mu}\frac{\partial V}{\partial t}\right). \end{aligned} \right.$$

En dérivant ces équations par rapport à t et en tenant compte de (137), (163), il vient les équations cherchées :

$$(167)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial\Delta\mathfrak{F}}{\partial t} - 2\pi\mathfrak{A}^2\lambda\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathfrak{F}}{\rho} + k\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\mathfrak{S} + \frac{K\mu-\lambda}{\mu}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}\right) &= 0, \\ \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial\Delta\mathfrak{G}}{\partial t} - 2\pi\mathfrak{A}^2\lambda\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathfrak{G}}{\rho} + k\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\mathfrak{S} + \frac{K\mu-\lambda}{\mu}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}\right) &= 0, \\ \frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial\Delta\mathfrak{H}}{\partial t} - 2\pi\mathfrak{A}^2\lambda\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\mathfrak{H}}{\rho} + k\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\mathfrak{S} + \frac{K\mu-\lambda}{\mu}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t}\right) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Cherchons maintenant ce que deviennent ces équations à l'intérieur d'un aimant permanent. D'après (115), $\Delta\Phi$ a

une valeur donnée indépendante de t, de sorte que, au lieu de (164), on a

$$\Delta \mathcal{F} - \sqrt{\varepsilon'}\,\Delta\Phi = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left[-4\pi f + (1-\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial t}\right].$$

En dérivant par rapport à t, $\Delta\Phi$ disparaît et, comme l'expression de f n'est pas changée, on aboutit aux équations (167) où l'on fait $\mu = 1$.

Les équations indéfinies (167), jointes aux conditions aux limites (138), ou (142), ou (143) et aux conditions initiales, déterminent alors sans ambiguïté les fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ à chaque instant, de sorte que le problème général de l'Électrodynamique se trouve résolu.

Avant de traiter de l'intégration des équations (167), nous allons former les équations indéfinies du potentiel électrique et des champs électrique et magnétique, qui se rattachent au type (167), comme nous allons le voir.

Dérivons (166) respectivement par rapport à x, y, z et ajoutons membre à membre; il vient, d'après (137), (163) et (46), l'équation indéfinie du potentiel électrique

$$(168)\qquad \frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\left(-\varepsilon\Delta V + \lambda\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right) + K\frac{\partial}{\partial t}\left(-\varepsilon\Delta V + \lambda\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{K-1}{K}\frac{\partial^3 V}{\partial t^3}\right) = 0.$$

Dérivons maintenant (167) par rapport à t et remplaçons-y $\frac{\partial(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})}{\partial t}$ par leurs valeurs tirées de (123). En posant

$$(169)\qquad \theta = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

et en tenant compte de (168), il vient les équations indéfinies du champ électrique

$$(170)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\lambda}{\mu}\frac{\partial\Delta X}{\partial t} - 2\pi\mathfrak{A}^2\lambda\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{X}{\rho} + k\frac{\partial X}{\partial t}\right) \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\theta + \frac{K\mu - \lambda}{\mu}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Ce sont les mêmes que celles du potentiel vecteur total;

on doit encore y faire $\mu = 1$ à l'intérieur d'un aimant permanent.

Enfin, la deuxième (166), dérivée par rapport à z et retranchée de la troisième dérivée par rapport à y, donne, d'après (139) et (46), la première des suivantes :

$$(171)\quad (K-1)\frac{d^2(\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z)}{dt^2} + \frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\frac{d(\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z)}{dt} - \frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mu}\Delta(\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z) = 0,$$

où l'on devra faire $\mu = 1$ à l'intérieur d'un aimant permanent et où l'on pourra remplacer $(\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z)$ par $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ à l'intérieur d'un aimant parfaitement doux.

Cela posé, il résulte d'un théorème de Clebsch généralisé par Duhem que l'intégrale des équations (167) est de la forme

$$(172)\quad \begin{cases} \mathcal{F} = \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \\ \mathcal{G} = \dfrac{\partial U}{\partial y} + \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}, \\ \mathcal{H} = \dfrac{\partial U}{\partial z} + \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}, \end{cases}$$

U étant une intégrale de l'*équation aux dilatations*

$$(173)\quad \frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\left(-\varepsilon\Delta U + \lambda\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) + K\frac{\partial}{\partial t}\left(-\varepsilon\Delta U + \lambda\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{K-1}{K}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right) = 0$$

et P, Q, R trois intégrales de l'*équation aux rotations*

$$(174)\quad (K-1)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mu}\Delta W = 0,$$

liées par la relation

$$(175)\quad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

D'une manière générale, on convient de dire que l'équation (173) est celle des *perturbations longitudinales* et (174) celle des *perturbations transversales*.

Comme les équations (170) du champ électrique sont identiques à celles (167) du potentiel vecteur total, celle (168) du potentiel électrique à celle (173) d'une perturbation longitudinale et celles (171) du champ ou de l'induction magnétique à celle (174) d'une perturbation transversale, on peut dire, d'après (172), que le potentiel vecteur total et le champ électrique résultent chacun de deux perturbations, l'une longitudinale, l'autre transversale, tandis que le potentiel électrique est une perturbation longitudinale et le champ magnétique une perturbation transversale.

En outre, l'application de la méthode d'Hugoniot aux équations (173) et (174) montre que les perturbations longitudinales se propagent dans le milieu considéré avec la vitesse L définie par l'égalité

$$(176) \qquad L^2 = \frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\lambda}\,\frac{K}{K-1},$$

tandis que les perturbations transversales se propagent avec la vitesse T définie par l'égalité

$$(177) \qquad T^2 = \frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\,(K-1)\mu}.$$

On voit que ces vitesses de propagation sont indépendantes de la résistivité du milieu.

35. *Relation entre la constante fondamentale des actions électrostatiques et la constante fondamentale des actions électrodynamiques.* — Il est facile de voir que le rapport $\frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}}$ est égal au carré d'une vitesse. Cette relation très importante fait intervenir les constantes K et μ des milieux homogènes qui interviennent dans la mesure de ce rapport; comme elle a été l'objet de discussions récentes à la Société française de Physique, nous allons l'établir en exposant sommairement une des nombreuses méthodes par laquelle le rapport en question peut être mesuré.

Au moyen d'un commutateur tournant, un condensateur plan de surface d'armature S, muni d'une lame isolante

d'épaisseur e et de pouvoir inducteur spécifique K, donc de capacité $C = \frac{KS}{4\pi e}$, est chargé et déchargé N fois par unité de temps dans un galvanomètre balistique; la durée d'un tour du commutateur étant supposée très petite par rapport à la période d'oscillation du galvanomètre, celui-ci accuse une déviation constante α, qui est celle qui correspondrait à un courant constant NCE, E étant la force électromotrice de la pile de charge. On a donc

$$\alpha = \mathfrak{K}\,NCE,$$

$\mathfrak{K}$ étant la constante du galvanomètre.

Faisons maintenant débiter directement la pile sur le galvanomètre; on observera une déviation $\alpha' = \mathfrak{K}\frac{E}{R}$, R étant la résistance totale du circuit; d'où

$$(178) \qquad \frac{\alpha}{\alpha'} = NCR = NR\frac{KS}{4\pi e}.$$

D'autre part, au centre d'un long solénoïde portant N' spires par unité de longueur et traversé par un courant I, faisons tourner à la vitesse angulaire constante ω une petite bobine plate de surface totale S' autour d'un axe normal à celui du solénoïde. D'après (140), la force électromotrice induite dans la bobine est alternative et son maximum est

$$\frac{\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\varepsilon'}}\mu\mathcal{H}S'\omega, \qquad \mathcal{H} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}\,4\pi N'I$$

étant le champ magnétique uniforme créé par le solénoïde et μ la perméabilité du milieu ambiant; la force électromotrice induite maxima est donc

$$\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mu 4\pi N'IS'\omega.$$

Au moyen d'un appareil de zéro, ajustons ω de façon que cette force électromotrice fasse équilibre à la force électromotrice RI prise sur le circuit alimentant le solénoïde; il vient

$$R = \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mu 4\pi N'S'\omega,$$

de sorte que, en remplaçant R par cette valeur dans (178), il vient une relation qu'on peut écrire

$$\frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2} K_0 \mu_0} = \frac{\alpha'}{\alpha} \frac{SS'NN'\omega}{e} \frac{K}{K_0} \frac{\mu}{\mu_0},$$

K_0 étant, par exemple, le pouvoir inducteur spécifique du vide, μ_0 sa perméabilité. On voit que le second membre est homogène au carré d'une vitesse et immédiatement calculable, car l'expérience fait aisément connaître les rapports $\frac{K}{K_0}$ et $\frac{\mu}{\mu_0}$. On a trouvé pour cette vitesse celle v de la lumière dans le vide; d'où, la relation fondamentale cherchée

$$\text{(179)} \qquad \frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2} K_0 \mu_0} = v^2,$$

que la plupart des auteurs écrivent en égalant ε et $\frac{\mathfrak{A}^2}{2}$ à l'unité. De là, des contradictions multiples, dont la première est que le produit $K\mu$ cesse d'être un nombre abstrait, énoncé en contradiction avec les formules de définition (46) et (25′) de K et de μ.

36. *Hypothèse de Faraday-Mossotti.* — D'après les expériences de Hertz et de ses continuateurs, la vitesse de propagation des perturbations électromagnétiques transversales dans le vide est égale à celle v de la lumière dans ce même milieu; on a donc, d'après (177),

$$v^2 = \frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}(K_0 - 1)\mu_0}.$$

Cette égalité n'est compatible avec (179), aux erreurs d'expériences près, que si $K_0 - 1$ diffère très peu de K_0, c'est-à-dire si K_0 est un nombre très grand par rapport à l'unité. Comme d'ailleurs K_0 est le plus petit des pouvoirs inducteurs spécifiques connus, on se trouve conduit, pour concilier la formule (177) avec l'expérience, à énoncer le postulat suivant appelé par Duhem *Hypothèse de Faraday-Mossotti :*

Le pouvoir inducteur spécifique d'un corps quelconque est un nombre très grand par rapport à l'unité.

Ce postulat n'est pas contraire à l'expérience, puisque celle-ci ne nous fait connaître que des rapports de pouvoirs inducteurs spécifiques.

Par suite de l'hypothèse de Faraday-Mossotti, le courant de polarisation de Helmholtz coïncide très sensiblement avec le courant de déplacement de Maxwell (n° 11), de sorte que le courant total (f, g, h) a la même signification dans les deux théories. D'autre part, la formule (176) devient

$$L^2 = \frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\lambda}; \tag{180}$$

elle exprime que les perturbations longitudinales se propagent avec la même vitesse dans tous les corps; d'autre part, l'équation (168) devient

$$\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\left(-\varepsilon\Delta V + \lambda\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right) + K\frac{\partial}{\partial t}\left(-\varepsilon\Delta V + \lambda\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right) = 0. \tag{181}$$

Or, les formules (123) donnent, d'après (137) et (169),

$$\theta = -\varepsilon\Delta V + \lambda\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \tag{182}$$

de sorte que (181) devient

$$\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\theta + K\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0, \tag{183}$$

d'où, en intégrant,

$$\theta = \theta_0 e^{-\frac{4\pi\varepsilon}{K\rho}t}, \tag{184}$$

θ_0 étant la valeur initiale de θ. On en conclut que le champ électrique est transversal dans un milieu isolant et tend à le devenir dans un milieu conducteur.

37. *Valeur de la constante de Helmholtz.* — L'équation (31) dérivée par rapport à t s'écrit, d'après (56), (165), (44) et (169),

$$\frac{\partial\Delta V}{\partial t} = 4\pi\left(\frac{\theta}{\rho} + k\frac{\partial\theta}{\partial t}\right), \tag{184'}$$

d'où, en éliminant ΔV entre cette équation et (182),

$$\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\theta + K\frac{\partial\theta}{\partial t} = \lambda\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

ce qui exige qu'on ait, d'après (183),

$$\lambda\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0.$$

Si l'on satisfaisait à cette condition en annulant $\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$, V serait une fonction parabolique de t, et il en résulterait que le potentiel électrique d'un système abandonné à lui-même augmenterait indéfiniment en chacun de ses points, ou resterait stationnaire. Cette conclusion étant en contradiction manifeste avec l'expérience, on ne peut satisfaire à l'équation ci-dessus qu'en posant $\lambda = 0$. Ainsi, *la constante de Helmholtz est nulle*. Il résulte alors de (180) que L est infini, de sorte que *les perturbations longitudinales ne se propagent plus.*

38. *Équations définitives du potentiel électrique et du potentiel vecteur total.* — En annulant λ dans (181), il vient comme équation indéfinie du potentiel électrique, qu'on doit désormais substituer à (168) ou (181),

$$\Delta\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}V + K\frac{\partial V}{\partial t}\right) = 0. \tag{185}$$

Dans le cas où le système est constitué par un seul corps homogène indéfini, ρ et K sont constants dans tout l'espace et l'équation précédente se réduit à

$$\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}V + K\frac{\partial V}{\partial t} = 0;$$

la loi de variation de V est alors analogue à celle (184) de la fonction θ. D'autre part, l'équation (31) s'écrit, d'après (44) et (169),

$$\Delta V = 4\pi(-e + k\theta)$$

et, comme ΔV et θ vérifient la même équation (185) ou (183), il en est de même de la densité cubique e. Celle-ci s'évanouit donc asymptotiquement suivant la loi (184), de sorte que la

distribution électrique tend à devenir purement superficielle.

Les équations (166) s'écrivent de même

$$(186)\quad \begin{cases} \frac{\varepsilon}{\mu}\Delta\mathcal{F} - \frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\mathcal{F} + K\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}\right) \\ \quad = \varepsilon\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}V + K\frac{\partial V}{\partial t}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

d'où, d'après (185), les équations indéfinies du potentiel vecteur total,

$$(187)\quad \Delta\left[K\frac{\partial^2(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H})}{\partial t^2} + \frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\frac{\partial(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H})}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mu}\Delta(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H})\right] = 0,$$

qu'on doit substituer dorénavant aux équations (167) et où l'on doit faire $\mu = 1$ dans les aimants permanents. Dans le cas d'un seul corps homogène indéfini, ces équations se réduisent à

$$K\frac{\partial^2(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H})}{\partial t^2} + \frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\frac{\partial(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H})}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mu}\Delta(\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H}) = 0.$$

D'autre part, l'équation (137) se réduit à

$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial y} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z} = 0,$$

de sorte que le vecteur $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ est transversal. Les conditions aux limites (138), (142) ou (143), que vérifie ce vecteur, étant indépendantes de k et de λ ne subissent aucune modification.

39. *Équations définitives du champ électrique.* — On a, d'après (123),

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}V + K\frac{\partial V}{\partial t}\right)$$
$$= -\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}X - K\frac{\partial X}{\partial t} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\mathcal{F} + K\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}\right),$$

d'où, en substituant dans la première (186),

$$\frac{\varepsilon}{\mu}\Delta\mathfrak{F} + \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}X + K\frac{\partial X}{\partial t}\right) = 0.$$

Mais on a, d'après (123),

$$\Delta X = -\varepsilon\frac{\partial\Delta V}{\partial x} - \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\frac{\partial\Delta\mathfrak{F}}{\partial t}$$

et, d'après (182), $\theta = -\varepsilon\Delta V$; d'où

$$\Delta X = \frac{d\theta}{dx} + \frac{\mu}{\varepsilon}\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}X + K\frac{\partial X}{\partial t}\right).$$

De là, la première des équations indéfinies du champ électrique

(188) $$K\frac{\partial^2(X, Y, Z)}{\partial t^2} + \frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mu}\left[\Delta(X, Y, Z) - \frac{d\theta}{\partial(x, y, z)}\right] = 0,$$

qu'on doit substituer dorénavant aux équations (170) et où l'on doit faire $\mu = 1$ dans les aimants permanents. L'intégrale de ces équations est de la forme

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},$$
$$Y = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},$$
$$Z = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

U étant une intégrale de l'équation aux dilatations

$$\Delta\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\rho}U + K\frac{\partial U}{\partial t}\right) = 0,$$

et P, Q, R trois intégrales de l'équation aux rotations

$$K\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{4\pi\varepsilon}{\rho}\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mu}\Delta W = 0$$

liées par la relation (175). D'après (183) ou (184), le champ

électrique est transversal dans un milieu isolant et tend à le devenir dans un milieu conducteur.

Ainsi que nous l'avons fait (n° 27) pour le potentiel vecteur total, cherchons les conditions aux limites qui, jointes aux équations indéfinies (188) et aux conditions initiales, achèvent de déterminer le champ électrique en chaque point du système, en supposant toujours chaque corps homogène et la force électromotrice hydro-électrique nulle.

Les égalités (123), écrites en deux points infiniment voisins de part et d'autre de la surface séparative de deux milieux 1 et 2, donnent, par suite de la continuité du vecteur ($\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$),

$$|\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2| + \varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2}\right) = 0.$$

Mais, l'égalité (32) dérivée par rapport à t devient, d'après (57), (165) et (44),

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial n_1} + \frac{\partial V}{\partial n_2}\right) = 4\pi\left|\alpha_1\left(\frac{X_1}{\rho_1} + k_1\frac{\partial X_1}{\partial t}\right) + \alpha_2\left(\frac{X_2}{\rho_2} + k_2\frac{\partial X_2}{\partial t}\right)\right|,$$

d'où, en éliminant V et d'après (46),

$$(189)\quad \left|\alpha_1\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\rho_1}X_1 + K_1\frac{\partial X_1}{\partial t}\right) + \alpha_2\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\rho_2}X_2 + K_2\frac{\partial X_2}{\partial t}\right)\right| = 0.$$

Il résulte de cette égalité qu'à la traversée d'une surface séparative la composante normale du champ électrique est discontinue.

Soient, d'autre part, α, β, γ les cosinus directeurs d'une demi-tangente $M\tau$ menée en M à la surface séparative S; on déduit des égalités (123) écrites de part et d'autre de M, en remarquant que la continuité de V à travers S entraîne celle de sa dérivée suivant $M\tau$,

$$|\alpha(X_1 - X_2)| = 0,$$

condition qui exprime la continuité de la composante tangentielle du champ électrique et qui équivaut aux deux suivantes :

$$(190)\quad \frac{X_1 - X_2}{\alpha_1 \text{ ou } \alpha_2} = \frac{Y_1 - Y_2}{\beta_1 \text{ ou } \beta_2} = \frac{Z_1 - Z_2}{\gamma_1 \text{ ou } \gamma_2},$$

avec le même indice dans les trois dénominateurs. Remar-

quons que les conditions aux limites (189) et (190) sont indépendantes de l'hypothèse de Faraday-Mossotti et de la valeur attribuée à λ.

40. *Équations définitives du champ magnétique.* — Les équations du champ magnétique à l'intérieur d'un aimant parfaitement doux sont, d'après (171) et l'hypothèse de Faraday-Mossotti,

$$(191) \quad K \frac{\partial^2(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})}{\partial t^2} + \frac{4\pi\varepsilon}{\rho} \frac{\partial(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2}\mu} \Delta(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) = 0.$$

A l'intérieur d'un aimant permanent, on doit y faire $\mu = 1$ et remplacer $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ par $\mathfrak{B}_x, \mathfrak{B}_y, \mathfrak{B}_z$.

Passons à la recherche des conditions aux limites à joindre aux équations (191); les équations (136′), qui définissent le champ magnétique en tout point du système, écrites en deux points infiniment voisins de part et d'autre de la surface séparative de deux milieux 1 et 2, donnent, par suite de la continuité des dérivées $\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(x, y, z)}$,

$$|\alpha_1 \mathfrak{X}_1 + \alpha_2 \mathfrak{X}_2| + \epsilon'\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n_1} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n_2}\right) = 0,$$

d'où, d'après (8) et (10),

$$|\alpha_1 \mathfrak{B}_{1x} + \alpha_2 \mathfrak{B}_{2x}| = 0.$$

Cette condition est valable aussi bien pour les aimants parfaitement doux que pour les aimants permanents; en particulier, si les deux corps contigus sont des aimants parfaitement doux, elle s'écrit

$$(192) \qquad \mu_1|\alpha_1 \mathfrak{X}_1| + \mu_2|\alpha_2 \mathfrak{X}_2| = 0.$$

Il résulte de ces égalités qu'à la traversée d'une surface séparative la composante normale de l'induction magnétique est continue et celle du champ magnétique discontinue.

Soient encore α, β, γ les cosinus directeurs d'une demi-tangente $M\tau$ menée en M à la surface séparative; on déduit, de même, des équations (136′)

$$|\alpha(\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2)| = 0,$$

condition qui équivaut aux deux suivantes

$$(193)\qquad \frac{\mathfrak{X}_1 - \mathfrak{X}_2}{\alpha_1 \text{ ou } \alpha_2} = \frac{\mathfrak{Y}_1 - \mathfrak{Y}_2}{\beta_1 \text{ ou } \beta_2} = \frac{\mathfrak{Z}_1 - \mathfrak{Z}_2}{\gamma_1 \text{ ou } \gamma_2},$$

avec le même indice dans les trois dénominateurs. A la surface séparative de deux aimants permanents, ces relations pourront s'écrire en y exprimant $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ en fonction de $\mathfrak{B}_x$, $\mathfrak{B}_y$, $\mathfrak{B}_z$ d'après (10), ce qui donnera par exemple

$$|\alpha[\mathfrak{B}_{1x} - \mathfrak{B}_{2x} - 4\pi\varepsilon'(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2)]| = 0.$$

Il résulte de ces égalités qu'à la traversée d'une surface séparative la composante tangentielle du champ magnétique est continue et celle de l'induction magnétique discontinue.

41. *Comparaison des équations obtenues avec celles de Maxwell.* — Les équations indéfinies (185), (187) du potentiel électrique et du potentiel vecteur total, auxquelles nous venons d'aboutir en dernière analyse par l'application de l'hypothèse de Faraday-Mossotti et en annulant la constante de Helmholtz, sont identiques à celles de Maxwell et il en est de même des équations indéfinies et aux limites (188), (189), (190), (192), (193) des champs électrique et magnétique.

D'une manière plus précise, certaines de nos équations coïncident avec celles de Maxwell indépendamment de l'hypothèse de Faraday-Mossotti et de la valeur attribuée à la constante λ de Helmholtz. C'est, par exemple, ce qui a lieu pour le premier groupe (144) des équations de Maxwell et pour les conditions aux limites (189), (190), (192), (193) des champs électrique et magnétique. D'autres coïncident avec celles de Maxwell dès qu'on y fait $\lambda = 0$, comme cela a lieu pour (137). D'autres, enfin, deviennent extrêmement voisines de celles de Maxwell, c'est-à-dire coïncident avec elles à la limite, donc conduisent aux mêmes résultats aux erreurs d'expériences près, soit en vertu de la seule hypothèse de Faraday-Mossotti, comme cela a lieu pour les équations indéfinies (171) du champ magnétique, soit en vertu de cette hypothèse et de ce qu'on y fait $\lambda = 0$. A cette dernière catégorie appartiennent les équations indéfinies (168), (167) et (170) du potentiel électrique, du potentiel vecteur

total et du champ électrique, qui, à la limite, deviennent celles (185), (187), (188) de Maxwell, et aussi les équations (145) qui, à la limite, deviennent le second groupe (145') des équations de Maxwell. En effet, le courant de déplacement de Maxwell étant extrêmement voisin du courant de polarisation de Helmholtz en vertu de l'hypothèse de Faraday-Mossotti (n° 11), il en est de même du courant total (f, g, h); or, d'après (58), (165), (44) et (123), la quantité $-4\pi f$ de la première (145) peut être regardée comme une somme de termes, dont l'un est $4\pi\varepsilon k \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t}$ et par rapport auquel le second terme $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t}$ de la parenthèse est négligeable.

On sait, enfin, qu'une des hypothèses essentielles de Maxwell se traduit par l'équation $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = 0$. Or on a, d'après (145) et (184),

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Delta V}{\partial t} = \frac{0}{\rho} + k\frac{\partial 0}{\partial t}.$$

La divergence du courant total est donc extrêmement petite en vertu de l'hypothèse de Faraday-Mossotti et de l'équation (183).

Nous pouvons donc dire, en définitive, que tous les résultats essentiels dus à Maxwell, que ses successeurs se sont efforcés de conserver, se trouvent atteints naturellement par la théorie de Helmholtz-Duhem. Comme cette théorie a l'avantage de se développer suivant les règles d'une logique impeccable, de ne point briser la tradition et de s'appliquer tout aussi bien aux aimants permanents qu'aux aimants parfaitement doux, elle constitue, selon nous, la seule véritable démonstration des équations de Maxwell qui ait été donnée jusqu'ici.

42. *Les unités électriques.* — Duhem écrivait, il y a 30 ans [1] :

« Un exposé des principes qui régissent le choix des

[1] P. DUHEM, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. III, p. 458.

unités électriques semblera peut-être quelque peu déplacé dans le présent Ouvrage, tant à cause de son caractère élémentaire que du nombre des exposés analogues qu'on trouve dans les divers Traités; aussi, notre première intention n'était-elle pas de nous arrêter à l'examen de ces principes. Mais la lecture attentive des Traités et des Manuels répandus dans l'enseignement nous a révélé combien ces principes, bien simples en apparence, étaient en général méconnus. Les erreurs les plus graves entachent les pages que plusieurs auteurs consacrent aux unités électriques. »

Ces réflexions sont encore d'actualité aujourd'hui. Beaucoup de physiciens continuent d'enseigner que le système électromagnétique est défini en égalant à l'unité la constante ε' de la loi de Coulomb des actions magnétiques, que le produit $K_0\mu_0$ du pouvoir inducteur spécifique du vide par sa perméabilité est l'inverse $\frac{1}{v^2}$ du carré de la vitesse de la lumière dans le vide, que, dans tout système d'unités, une intensité de courant est égale à la puissance d'un feuillet magnétique, etc. De telles affirmations nous obligent ainsi à revenir sur un sujet qui devrait être classique depuis longtemps.

Nous avons vu qu'il y a en Électricité et en Magnétisme trois constantes fondamentales : celle ε des actions électrostatiques, celle ε' des actions magnétiques et celle $\frac{\mathfrak{A}^2}{2}$ des actions électrodynamiques, liées par la relation

$$(179) \qquad \frac{\varepsilon}{\frac{\mathfrak{A}^2}{2} K_0\mu_0} = v^2.$$

Cette relation étant indépendante de ε', le plus simple est de définir une fois pour toutes les unités magnétiques en faisant $\varepsilon' = 1$ dans la loi de Coulomb $F = \varepsilon' \frac{mm'}{r^2}$ des actions magnétiques, qui fait connaître la force de répulsion qu'on observe entre deux masses plongées dans un milieu impolarisable. Si, par exemple, les unités fondamentales de longueur, de masse et de temps sont les unités C. G. S., nous aurons ainsi défini les unités magnétiques C. G. S.

Les unités magnétiques étant ainsi définies, il y a deux façons simples de définir les unités électriques : soit en donnant une valeur arbitraire à ε, d'où il résultera, d'après (179), une valeur déterminée pour $\frac{\mathfrak{A}^2}{2}$; soit en procédant de la façon inverse. Nous aurons défini dans le premier cas le *système électrostatique*; dans le second, le *système électromagnétique* ou le *système électrodynamique*, suivant la valeur numérique particulière attribuée à $\frac{\mathfrak{A}^2}{2}$.

Or, nous savons (n° 9) que la force de répulsion qu'on *observe* entre deux conducteurs plongés dans le vide, portant des charges q, q' et situés à une distance r très grande par rapport à leurs dimensions, est

$$F = \frac{\varepsilon}{K_0} \frac{qq'}{r^2}. \tag{194}$$

Le système électrostatique définit donc l'unité de masse électrique en faisant, dans (194), $\frac{\varepsilon}{K_0} = 1$; on en déduit les autres unités électriques d'intensité, de potentiel, de capacité, de résistance, etc., par des formules usuelles. Les actions électromagnétiques et électrodynamiques se calculeront ensuite au moyen des formules générales de l'Électromagnétisme et de l'Électrodynamique et à l'aide des unités magnétiques et électrostatiques ci-dessus définies; mais, d'après (179), la constante $\frac{\mathfrak{A}^2}{2}$ devra y recevoir la valeur

$$\frac{1}{\mu_0 v^2}.$$

Comme, d'ailleurs, on ne mesure que des rapports de perméabilités, on peut, sans risquer de contradiction expérimentale, poser $\mu_0 = 1$, ce qui revient à admettre que le vide n'est pas magnétique. Le système électrostatique est ainsi caractérisé par les valeurs

$$\frac{\varepsilon}{K_0} = 1, \qquad \varepsilon' = 1, \qquad \frac{\mathfrak{A}^2}{2} = \frac{1}{v^2}$$

des trois constantes fondamentales.

Inversement, le système électromagnétique est défini par

les valeurs

$$\frac{\mathfrak{A}^2}{2} = 1, \qquad \varepsilon' = 1, \qquad \frac{\varepsilon}{K_0} = v^2$$

des trois constantes fondamentales, et le système électrodynamique par les valeurs

$$\mathfrak{A}^2 = 1, \qquad \varepsilon' = 1, \qquad \frac{\varepsilon}{K_0} = \frac{v^2}{2}$$

de ces mêmes constantes. On comprend ainsi pourquoi les unités électrodynamiques ne diffèrent des unités électromagnétiques que par un coefficient purement numérique. On voit, en outre, que les unités magnétiques sont *les mêmes* dans les trois systèmes, ce qui tient, comme nous l'avons vu, à ce fait que ces unités sont définies antérieurement à toute unité électrique. En particulier, le gauss est l'unité C.G.S. de champ et d'induction magnétiques; cette unité n'est ni électrostatique, ni électromagnétique ou électrodynamique; elle est C.G.S. tout court.

Les propositions précédentes diffèrent trop de celles couramment enseignées pour que nous n'expliquions rapidement les raisons de cette discordance.

La plupart des auteurs écrivent les lois de Coulomb dans le vide sous la forme

$$F = \frac{1}{K_0}\frac{qq'}{r^2}, \qquad F = \frac{1}{\mu_0}\frac{mm'}{r^2}.$$

La première équivaut à faire $\varepsilon = 1$ dans (194); la seconde est une transposition par analogie de la première, mais illégitime, car nous avons vu (n° 9) que les actions magnétiques ne peuvent être exprimées par la même formule globale que les actions électriques. D'autre part, ces mêmes auteurs égalent à l'unité le coefficient $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon'}$ de la loi de Laplace dans tout système d'unités; cette façon de procéder, jointe aux deux formules ci-dessus, les conduit à la relation

$$\frac{1}{K_0\mu_0} = v^2,$$

qui remplace la nôtre (179). En définitive, ces formules reviennent à égaler à l'unité chacune des trois con-

stantes fondamentales ε, ε', $\frac{\mathfrak{A}^2}{2}$, et cela dans tout système d'unités.

Les contradictions résultant de tels procédés ne tardent pas à se manifester; par exemple, dans le système électrostatique, où K_0 devient égal à 1 par définition, μ_0 devient égal à $\frac{1}{v^2}$, donc cesse d'être un nombre abstrait, résultat en contradiction avec les lois les plus certaines de la polarisation magnétique. De même, d'après (79), une intensité de courant serait, dans tout système d'unités, égale à la puissance d'un feuillet magnétique, ce qui revient à dire qu'une masse magnétique serait toujours le produit d'une quantité d'électricité par une vitesse.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE III.

L'ÉNERGIE INTERNE ET LES LOIS DE L'AIMANTATION.

CHAPITRE IV.

LES ACTIONS ÉLECTRODYNAMIQUES ET ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

CHAPITRE V.

LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE.

λ = constante de Helmholtz : 33, 35, 36, 37, 39, 40, 53, 74, 75, 76, 77

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.